

Über die Klassifizierung
dreidimensionaler, kompakter,
orientierbarer Mannigfaltigkeiten
unter besonderer Berücksichtigung der
Fundamentalgruppe

JOHANNES SPIELMANN

Juli 2008

Betreuer: Professor Frank Loose

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Fakultät für Mathematik und Physik

Eine der grundlegenden Fragen der Differentialgeometrie ist die folgende: Welche Mannigfaltigkeiten einer gegebenen Dimension existieren und wie kann zwischen diesen unterschieden werden? Die gängige Definition der Gleichheit zweier Mannigfaltigkeiten mittels der Existenz eines Diffeomorphismus ist zwar intuitiv und naheliegend, in konkreten Fällen aber nur sehr schwer anzuwenden; schwieriger noch ist der Beweis, dass kein solcher Diffeomorphismus existieren kann.

Die Fundamentalgruppe ist ein Hilfsmittel, um diese Unterscheidung zu erleichtern. Dabei wird jeder Mannigfaltigkeit eine Gruppe zugeordnet, welche sich unter Diffeomorphismen nicht verändert. Findet man nun für zwei Mannigfaltigkeiten Fundamentalgruppen, welche nicht isomorph sind, so kann es auch keinen Diffeomorphismus zwischen diesen Mannigfaltigkeiten geben. Die Definition der Fundamentalgruppe sowie dazugehörige Sätze und Eigenschaften sind ein erster Bestandteil dieser Arbeit.

Die Klassifizierung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten im Thurstonprogramm sieht vor, dass mittels dreier Konstruktionsmechanismen Mannigfaltigkeiten hergestellt werden. Diese drei Methoden sind: Quotientenbildung, zusammenhängende Summe entlang Sphären und zusammenhängende Summe entlang Tori. Diese drei Methoden werden in dieser Arbeit vorgestellt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften bezüglich der Fundamentalgruppe untersucht. Wir werden zeigen können, dass für jedes der drei Verfahren im Prinzip die Fundamentalgruppe bestimmbar ist, so dass abschließend (prinzipiell) für jede 3-Mannigfaltigkeit die Fundamentalgruppe bestimmbar bleibt.

Danksagungen

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer, Professor Loose, sowie bei Maren Reimold für fachliche Unterstützung. Ich danke meinen Freunden und meiner Familie für private, soziale und finanzielle Unterstützung, und dass sie das lange Warten ausgehalten haben.

Ich danke meiner Freundin für alles.

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Diese Arbeit wurde in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer Prüfung vorgelegt.

Tübingen, den

Johannes Spielmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	11
2	Grundlagen und Hilfsmittel	15
3	Die Fundamentalgruppe	29
4	Zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten	45
5	Die Theorie der Flächen	59
6	Quotienten von Mannigfaltigkeiten	65
7	Sphären, Tori und Summen der Dimension 3	81
8	Zusammenhängende Summen entlang eingebetteter Tori	89
9	Das Thurstonprogramm	95

1 Einführung

Eines der zentralen Probleme in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik ist es, die Anzahl und Variation der betrachteten Objekte angeben zu können. So wird beispielsweise in der Gruppentheorie exakt unterschieden, welche Gruppen existieren und wie diese auseinander zu halten sind; ebenso verhält es sich in der Körper-, Ring- oder Vektorraumtheorie und in vielen weiteren Gebieten. Nun hängt die Liste der möglichen betrachteten Objekte sehr stark mit dem gewählten Gleichheitsbegriff zusammen. Wird eine zu starke Unterscheidung gewählt, so entsteht möglicherweise eine solch riesige Anzahl von Objekten, dass eine Auflistung weder möglich ist noch sinnvoll wäre. Wählt man aber eine zu schwache Unterscheidung, fallen sehr viele Objekte bereits zu einer Klasse zusammen; die Auflistung wird trivial und unnützlich.

Die eben skizzierte Frage kann zusammengefasst werden: Wähle für eine Art von Objekten einen Gleichheitsbegriff und gib an, welche Objekte (oder Objektklassen) damit existieren!

Diese Frage steht auch im Mittelpunkt der Differentialgeometrie und ihres Vorgängers, der algebraischen Geometrie. Bereits in der Gründungszeit versuchten Riemann, Möbius und Gauß herauszufinden, *welche* topologischen Räume und *welche* nicht-euklidischen Geometrien es denn nun gäbe, und hatten damit auch bereits große Erfolge. Die Art Objekte, mit denen sich die moderne Differentialgeometrie beschäftigt, sind die sogenannten „Mannigfaltigkeiten“, eine Art lokal trivialer topologischer Raum (siehe Definition 2.11); sie besitzen einen ersten Parameter, die Dimension, welcher die betreffende Mannigfaltigkeit lokal an einen \mathbb{R}^n bindet. Wie erwartet stellt sich dazu die Frage, welche dieser „Mannigfaltigkeiten“ als „gleich“ gelten sollen, und wie dann zwischen diesen unterschieden werden kann. Unglücklicherweise zeigt sich, dass die gewählte Äquivalenz nicht für jede Dimension die gleiche sein kann, da genau die oben beschriebenen Probleme in unterschiedlichen Dimensionen in verschiedener Art auftreten: Wählt man eine Äquivalenz, die die richtige Balance für eine Dimension trifft, so kann dies für Mannigfaltigkeiten einer Dimension darüber oder darunter bereits zu schwach oder zu stark unterscheiden.

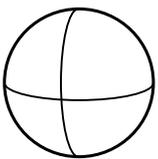
Für die hier betrachteten Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 (kurz: 3-Mannigfaltigkeiten) werden zwei Mannigfaltigkeiten als „gleich“ betrachtet, wenn es einen „Diffeomorphismus“ zwischen ihnen gibt (siehe Definition 2.13), eine bestimmte Art glatter Abbildung. Diese Art der Gleichheit ist als Erweiterung des topologischen Begriffs des Homöomorphismus eine naheliegende und, wie wir sehen werden, sinnvolle Wahl. Auch für Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 1 und 2 können wir die gleiche Äquivalenz benutzen und erhalten somit einen praktischen Begriff für die untersten drei Dimensionen.

Zwar ist die gewählte Gleichheit durch Existenz von Diffeomorphismen topologisch

sinnvoll, jedoch ist sie nur sehr schwer handzuhaben. Der Beweis, dass ein Diffeomorphismus existiert ist oft nur konstruktiv und sehr technisch durchzuführen; noch schwieriger ist es zu beweisen, dass *kein* Diffeomorphismus existiert. Ein Merkmal, das die Unterscheidung erheblich erleichtert, ist die „Fundamentalgruppe“ einer Mannigfaltigkeit (siehe Definition 3.17). Da sich die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit durch einen Diffeomorphismus nicht verändert, kann so zwischen zwei Mannigfaltigkeiten unterschieden werden: haben sie nicht die gleiche Fundamentalgruppe, so kann kein Diffeomorphismus existieren. Und obwohl die Reduktion eines so komplizierten Gebildes wie einer Mannigfaltigkeit auf eine einfache Gruppe sehr viel Information entfernt, werden wir sehen, dass die Fundamentalgruppe ein enorm nützliches Werkzeug ist, um Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden. In Kapitel 5 werden wir sehen, dass die Flächen (also Mannigfaltigkeiten der Dimension 2) bereits komplett charakterisiert werden können durch die Fundamentalgruppe, und in Kapitel 7 werden wir etwas ähnliches für 3-Mannigfaltigkeiten versuchen.

Nun stellt sich also noch die zweite Frage: *welche Mannigfaltigkeiten gibt es überhaupt?* Es stellt sich heraus, dass diese Frage sehr schwer zu beantworten ist oder gar keine Antwort hat. Während die Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 noch trivial zu erfassen sind, existieren in Dimension 2 schon abzählbar viele. Um die Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 wenigstens ungefähr auflisten zu können muss schon sehr viel bewegt werden, und der Beweis über die Korrektheit der Auflistung gelang erst vor kurzer Zeit [10]. In Dimension 4 kann bereits jede endlich erzeugte Gruppe als Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit auftreten; deren Klassifikation ist aber selbst unmöglich, und so ist die Definition, dass zwei 4-Mannigfaltigkeiten „gleich“ sind, wenn ein Diffeomorphismus zwischen ihnen existiert, offenbar zu schwach, denn sie unterscheidet so genau zwischen den Möglichkeiten dass eine Liste herauskommt, die nicht beherrschbar ist.

Das eine präzise Aufstellung der möglichen Sorten von 3-Mannigfaltigkeit notwendig ist, und dass diese Aufstellung wegen ihrer Größe der Intuition über Mannigfaltigkeiten widerspricht, zeigt eine einfache Überlegung: Welche 3-Mannigfaltigkeiten sind trivial oder intuitiv bekannt? Offensichtlich ist der \mathbb{R}^3 eine 3-Mannigfaltigkeit, welche aber nicht kompakt ist, für uns also nicht weiter interessant. Deren Kompaktifizierung ist die Sphäre S^3 (siehe Definition 2.18), welche sich offensichtlich von \mathbb{R}^3 durch die Kompaktheit unterscheidet. Und dann? Eine intuitive Auflistung der Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 enthält gerade einmal *einen einzigen* Eintrag. Die tatsächliche Liste enthält, wie sich herausstellen wird, jedoch unendlich viele Elemente. Eine Unterscheidung zwischen diesen Elementen wird mitunter so schwer, dass die Auflistung über die verwendeten Methoden und Bausteine erfolgen muss.



Das Thurstonprogramm

Das Thurstonprogramm, oder genauer gesagt, die Thurstonsche Geometrisierungsvermutung enthält genau diese Auflistung. Sie wurde wurde 1982 von William Thurston im Rahmen einer Veröffentlichung der American Mathematical Society aufgestellt [15]

und lautet wie folgt:

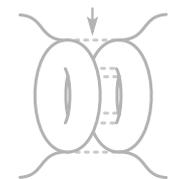
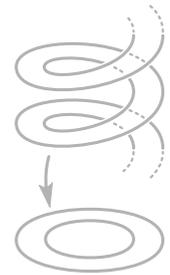
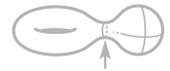
Conjecture 1.1: *The interior of every compact 3-manifold has a canonical decomposition into pieces which have geometric structures.*

(Das Innere einer jeden kompakten 3-Mannigfaltigkeit hat eine kanonische Dekomposition in Teile, welche geometrische Strukturen tragen.)

Diese Vermutung wird präzisiert, indem die Prozesse angegeben werden, mittels welchen die Dekomposition durchgeführt wird, und was mit der geometrischen Struktur gemeint ist. Namentlich handelt es sich bei der Dekomposition um Chirurgie entlang Sphären und um Chirurgie entlang bestimmter eingebetteter Tori. Die geometrische Struktur wird erreicht durch eine so genannte Überlagerung durch bestimmte Mannigfaltigkeiten, welche jeweils eine bestimmte Geometrie definieren. Kurz darauf konnte gezeigt werden, dass genau *acht* solcher Grundgeometrien existieren. Eine sehr kurze Übersicht über diese acht Geometrien werden wir in Kapitel 9 sehen.

Wir werden also in dieser Arbeit die drei Techniken kennenlernen, die im Thurstonprogramm angedeutet sind: die Dekomposition entlang Sphären (beziehungsweise deren Umkehrung, die zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeit) in Kapitel 4, die Dekomposition entlang Tori (oder die zusammenhängende Summe entlang Tori) in Kapitel 8 sowie die Quotientenbildung aus einer Mannigfaltigkeit, die gleichzeitig die Geometrie erhält in Kapitel 6.

Und schließlich werden wir uns noch einmal genauer betrachten, welche Auswirkungen und Konsequenzen das Thurstonprogramm hat und einige der Mannigfaltigkeiten, die es herstellt, klassifizieren und unterscheiden lernen.



Übersicht

In Kapitel 2 werden die Grundlagen erklärt, die notwendig sind, um sich überhaupt mit Mannigfaltigkeiten beschäftigen zu können. In Kapitel 3 wird die Fundamentalgruppe definiert und ihre Eigenschaften erkundet. In Kapitel 4 werden wir das erste Werkzeug kennen lernen, mit dem wir aus zwei Mannigfaltigkeiten eine neue konstruieren können: die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten. In Kapitel 5 werden wir dieses Werkzeug benutzen, um alle existierenden Flächen (also Mannigfaltigkeiten der Dimension 2) zu bestimmen, was uns später als Grundlage dienen wird, die 3-Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. In Kapitel 6 lernen wir das zweite Werkzeug auf unserem Weg zur kompletten Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten kennen: die Quotientenbildung, die aus einer Mannigfaltigkeit eine „kleinere“ produziert. Im anschließenden Kapitel 7 werden wir die bis dahin gefundenen Werkzeuge benutzen um, analog zu dem Kapitel über Flächen, die gefundenen Möglichkeiten auszuschöpfen und zu sehen, ob die Klassifikation bereits abgeschlossen ist. In Kapitel 8 werden wir schließlich das dritte und letzte notwendige Werkzeug definieren: die zusammenhängende Summe entlang eingebetteter Tori, um schließlich in Kapitel 9 einen kurzen Überblick über das Thurston-Programm und die komplette Klassifizierung von Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 zu geben.

2 Grundlagen und Hilfsmittel

In diesem Kapitel werden die notwendigen Definitionen und Begriffe erklärt, die wir im Laufe dieser Arbeit benötigen werden.

Es folgt ein Abschnitt über Mannigfaltigkeiten und deren Eigenschaften, danach einige erste Mannigfaltigkeiten als Beispiele und ein Abschnitt über freie Produkte von Gruppen.

2.1 Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1 (topologische Mannigfaltigkeit): Ein topologischer Raum M der zusammenhängend und Hausdorffsch ist und abzählbare Topologie besitzt heißt eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Alternativ werden solche Mannigfaltigkeiten auch kürzer als *topologische n -Mannigfaltigkeiten* bezeichnet.

Eine Familie von Homöomorphismen $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$, so dass die offenen Mengen $U_i \subseteq M$ ganz M überdecken und $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen des \mathbb{R}^n sind, heißt ein *Atlas* \mathfrak{A} von M . Die Mitglieder $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ eines Atlases heißen *Karten* des Atlas und ihre Umkehrungen $\varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$ heißen *lokale Koordinatensysteme*. Für jedes Paar φ_i, φ_j von Karten heißt

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

eine *Übergangsfunktion* des Atlases.

Es ist zu beachten, dass durch diese Definition automatisch die Eigenschaften „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ zusammenfallen, da wegen der Karten der topologische Raum M bereits lokal wegzusammenhängend sein muss, und für lokal wegzusammenhängende Räume die Eigenschaften „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ äquivalent sind. Dies wird in späteren Abschnitten wichtig sein, da dort für topologische Räume stets zwischen zusammenhängend und wegzusammenhängend unterschieden werden muss, nicht aber für Mannigfaltigkeiten.

Wir werden uns im Folgenden auf solche topologischen Mannigfaltigkeiten spezialisieren, für die wir Atlanten mit einer besonderen Eigenschaft finden können, nämlich dass alle Übergangsfunktionen des Atlases glatt sind. Solche Atlanten werden dann ebenfalls als *glatt* bezeichnet:

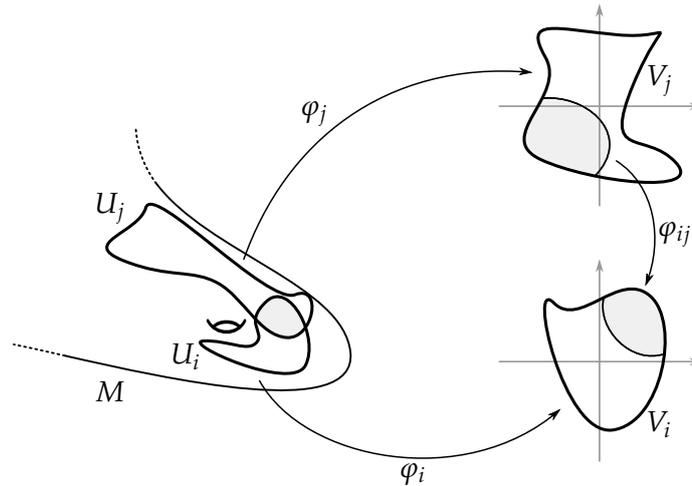


Abbildung 2.1: Einige Begriffe aus der Definition einer topologischen Mannigfaltigkeit: Der topologische Raum M wird lokal durch die Karten φ_i und φ_j trivialisiert. Zwischen den Karten vermittelt der Kartenwechsel φ_{ij} .

Definition 2.2 (glatte Mannigfaltigkeit): Ein (topologischer) Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ einer topologischen Mannigfaltigkeit M heißt *glatt*, wenn alle Übergangsfunktionen glatt sind, $\varphi_{ij} \in C^\infty$.

Zwei glatte Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\varphi_j)_{j \in J}$ heißen *äquivalent*, wenn ihre „Vereinigung“ $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\varphi_k)_{k \in I+J}$ (mit $I+J$ die mengentheoretische, disjunkte Vereinigung von I und J) ebenfalls ein glatter Atlas von M ist, d.h. wenn auch die neu entstandenen Übergänge glatt sind.

Eine Äquivalenzklasse $[\mathfrak{A}]$ von glatten Atlanten auf M heißt eine *glatte Struktur* auf M .

Eine topologische Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer glatten Struktur $[\mathfrak{A}]$ heißt schließlich *glatte Mannigfaltigkeit*. Wenn für eine glatte Mannigfaltigkeit klar ist, welche Struktur gemeint ist, oder wenn die Struktur keine große Rolle spielt, wird sie oft nicht mit notiert.

Mit einer weitere Spezialisierung des Mannigfaltigkeitsbegriffes erhalten wir schließlich solche Mannigfaltigkeiten, welche wir im Weiteren untersuchen werden.

Definition 2.3 (kompakte Mannigfaltigkeit): Eine Mannigfaltigkeit M ist *kompakt*, wenn sie als topologischer Raum kompakt ist.

Eine weitere Art von Mannigfaltigkeit sind die so genannten *berandeten* Mannigfaltigkeiten. Diese sind folgendermaßen definiert:

Definition 2.4: Ein zusammenhängender Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Topologie heißt eine *n-dimensionale, berandete topologische Mannigfaltigkeit*, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p besitzt, die homöomorph zu einer offenen

2.1. Mannigfaltigkeiten

Menge $\tilde{V}_p \subseteq \mathbb{R}_+^n$ im n -dimensionalen Halbraum $\mathbb{R}_+^n := \{(x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ ist. Ein Punkt $p \in M$ heißt *Randpunkt*, falls eine Karte φ um p existiert, so dass $\varphi(p) \in \{(x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ liegt. Die Menge der Randpunkte von M wird mit ∂M bezeichnet¹. Siehe auch Abbildung 2.2.

Die weiteren Definitionen folgen alle analog.

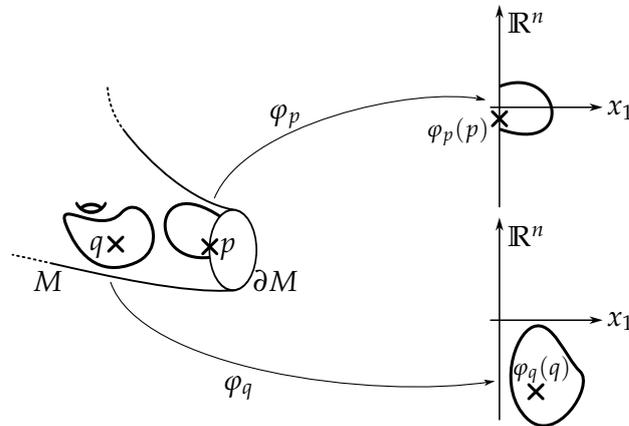


Abbildung 2.2: Berandete Mannigfaltigkeiten haben einen Rand, also solche Punkte, deren Karten am „Rand“ des Halbraumes \mathbb{R}_+^n liegen.

Falls eine berandete Mannigfaltigkeit M *leeren Rand* hat, also $\partial M = \emptyset$, so fällt Definition 2.11 mit Definition 2.4 zusammen, da Karten $\varphi : U \rightarrow V$, deren Bildbereich $V \subseteq \mathbb{R}_+^n \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ liegt, genau so mächtig sind wie Karten, deren Bildbereich in \mathbb{R}^n liegt (da \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}_+^n \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ homöomorph sind). Unberandete Mannigfaltigkeiten sind also ein Spezialfall von berandeten Mannigfaltigkeiten.

Wir werden uns im Folgenden zumeist auf unberandete Mannigfaltigkeiten beziehen, also auf solche, deren Rand $\partial M = \emptyset$ leer ist.

Eine erste Möglichkeit, Mannigfaltigkeiten zu produzieren, ist, das cartesische Produkt zweier Mannigfaltigkeiten zu bilden.

Satz 2.5: Für zwei (glatte, kompakte) Mannigfaltigkeiten N_1 und N_2 ist

$$M := N_1 \times N_2$$

wieder eine (glatte, kompakte) Mannigfaltigkeit.

BEWEIS: Folgt aus den Definitionen. ■

Damit haben wir bereits das erste Werkzeug gefunden, das wir benutzen können, um aus bekannten Mannigfaltigkeiten neue zu erstellen: das cartesische Produkt.

¹Diese Bezeichnung ∂M für die Randpunkte von M hat nichts mit der topologischen Bezeichnung des Randes einer Menge zu tun, sondern gilt ausschließlich für berandete Mannigfaltigkeiten.

2.1.1 Orientierbarkeit

Ein weiterer Begriff den wir benötigen, ist „orientierbar“. Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, grob gesagt, wenn es nicht möglich ist, durch Verschiebung eine Spiegelung zu erzeugen. Das heißt, in einer nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit M existiert ein eingebetteter Ball B und ein Pfad α , so dass durch die stetige Verschiebung von B entlang α die Menge B wieder auf sich selbst abgebildet wird, aber die Orientierung dabei umgekehrt wird (siehe auch Abb. 2.3). Leider ist es nicht einfach, den Begriff der Orientierbarkeit überhaupt präzise zu definieren, ohne sehr tief in die Details der Differentialgeometrie einsteigen zu müssen. Aus diesem Grund kann hier nur ein Überblick über die notwendigsten Definitionen gegeben werden (für eine vollständigere Betrachtung siehe z.B. [14]).

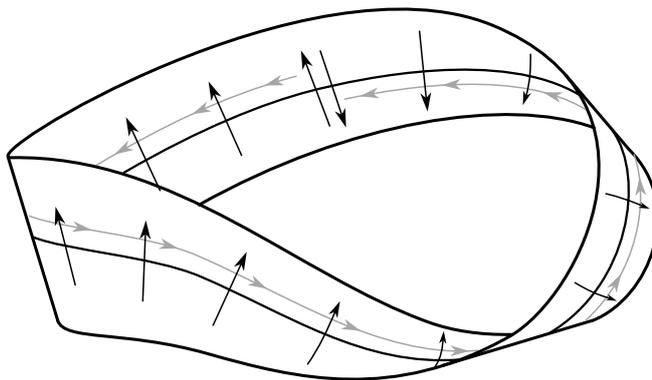


Abbildung 2.3: In einer nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit existieren Verschiebungen, die gleichzeitig Spiegelungen sind: die Richtung des Pfeils wird durch die Verschiebung entlang der „Seele“ des Möbiusbandes umgekehrt. Entfernt man die Pfeilspitze, so ist die gezeigte Verschiebung auch eine Spiegelung der gezeigten Linie.

Wir werden nun die wichtigsten Begriffe entwickeln, um definieren zu können, was Orientierbarkeit für eine Mannigfaltigkeit bedeutet.

Definition 2.6 (Derivation): Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Auf der mengentheoretischen Summe $\sum_{U \text{ Umgebung von } p, U \text{ offen}} \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ glatt}\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation: Für zwei glatte Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $f \sim g$, falls es eine Umgebung $W \subseteq U \cap \tilde{U}$ von p gibt, so dass $f|_W \equiv g|_W$ gilt. Die Quotientenmenge

$$\mathcal{E}_p(M) := \sum_{\substack{U \text{ Umgebung von } p \\ U \text{ offen}}} \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ glatt}\} / \sim$$

heißt die Menge der Funktionskeime an M in p . Ein Element $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ heißt also Funktionskeim.

Eine Abbildung $\zeta : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Derivation* auf $\mathcal{E}_p(M)$, wenn sie folgende Eigenschaft erfüllt: Für zwei Keime $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt:

$$\zeta(f_p g_p) = \zeta(f_p) \cdot g_p(p) + f_p(p) \cdot \zeta(g_p).$$

Ein Funktionskeim repräsentiert die Funktion und alle ihre Ableitungen „in einem Punkt“. Da aber Ableitungen nur auf einer Umgebung um einen Punkt definiert sind, muss stets eine kleine Umgebung um den Punkt vorhanden sein, die aber beliebig klein sein darf. Die Funktionskeime erben alle notwendigen Operationen von ihren erzeugenden Funktionen, $\mathcal{E}_p(M)$ ist eine \mathbb{R} -Algebra (siehe [14]).

Die von den Derivationen geforderte Eigenschaft ist eine Art erweiterte Leibnizregel, wir erwarten also, dass sich Derivationen wie eine Art verallgemeinerte Ableitungen verhalten. In der Tat kann jede Derivation auch als eine Ableitung eines Pfades auf der glatten Mannigfaltigkeit interpretiert werden: $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ein Pfad durch p , dann ist $f_p \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$ eine Derivation; und umgekehrt existiert für jede Derivation eine solche Kurve α . Die Derivationen stellen dann die Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit dar.

Definition 2.7 (Tangentialraum an einen Punkt): Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Die Menge der Derivationen von $\mathcal{E}_p(M)$ nach \mathbb{R} bildet den Tangentialraum von M im Punkt p , der bezeichnet wird durch

$$TM_p = \text{Der}(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}) = \{ \zeta : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R} : \zeta \text{ Derivation} \}.$$

Die Tangentialvektoren bilden punktweise einen Vektorraum.

Lemma 2.8: *Der Tangentialraum TM_p an eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M im Punkt p ist ein Vektorraum der Dimension n . (Ohne Beweis.)*

Nun müssen wir diese punktweisen Tangentialräume noch so aneinander legen, dass wir *den* Tangentialraum an eine glatte Mannigfaltigkeit bekommen. Dieser wird allerdings kein Vektorraum mehr sein können, sondern „nur“ eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer speziellen Struktur.

Definition 2.9 (Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit): Zu einer glatten Mannigfaltigkeit M setzen wir als mengentheoretische Summe

$$TM := \sum_{p \in M} TM_p$$

sowie

$$\pi : TM \rightarrow M : \pi(\zeta) = p \Leftrightarrow \zeta \in TM_p$$

so heißt $\pi : TM \rightarrow M$ das *Tangentialbündel* von M .

Das Tangentialbündel TM ist ein sog. *Vektorraumbündel* und trägt selbst wieder eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur (ohne Beweis).

Kapitel 2. Grundlagen und Hilfsmittel

Eine glatte Abbildung $s : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ s = \text{id}_M$ heißt ein *globaler Schnitt* von M in TM . Die Menge aller glatten Schnitte in TM wird bezeichnet mit

$$\Gamma(M, TM) := \{s : M \rightarrow TM, s \text{ glatter Schnitt}\}.$$

Diese Menge trägt eine Vektorraumstruktur (ohne Beweis).

Es gibt in $\Gamma(M, TM)$ einen einzigen ausgezeichneten globalen Schnitt, den Nullschnitt $p \mapsto 0_p$. Ein Schnitt $s \in \Gamma(M, TM)$ heißt *nullstellenfrei*, falls $s(p) \neq 0_p$ für alle $p \in M$.

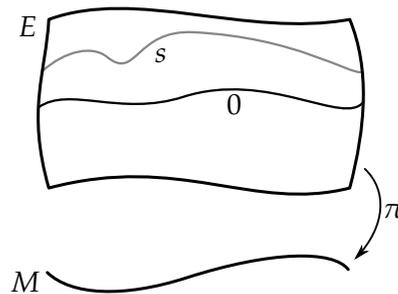


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung eines Vektorraumbündels $\pi : E \rightarrow M$ über einer glatten Mannigfaltigkeit M mit dem Nullschnitt und einer Orientierung s .

Wir haben damit also eine Art erweiterte „Funktionen“ definiert, die von M in ein „Bündel“ von Vektorräumen gehen. Ist dieses Bündel trivial, also diffeomorph zu $\mathbb{R} \times M$, so ist diese Identifikation sogar eindeutig.

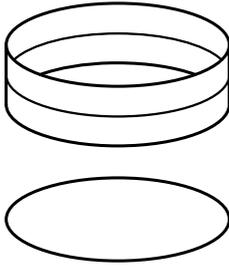
Definition 2.10 (Orientierbarkeit einer glatten Mannigfaltigkeit): Eine glatte Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, falls ein nullstellenfreier globaler Schnitt $s : M \rightarrow TM$ existiert. Jeder solche Schnitt s heißt dann eine *Orientierung* von M .

Eine orientierbare Mannigfaltigkeit (M, s) zusammen mit einer Orientierung s heißt eine *orientierte Mannigfaltigkeit*.

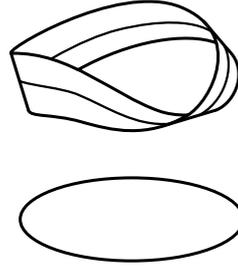
Das Tangentialbündel einer orientierbaren Mannigfaltigkeit ohne den Nullschnitt zerfällt damit in zwei Teile, was eine äquivalente Definition der Orientierbarkeit darstellt. Natürlich sind damit die Themen der Tangentialräume, Bündel und Orientierungen nur im Kürzesten angeschnitten. Für eine vollständigere und ausführlichere Betrachtung verweisen wir auf die Literatur (siehe z.B. [14]).

Nun können wir schließlich definieren, was wir mit dem einfachen Begriff „Mannigfaltigkeit“ bezeichnen:

Definition 2.11 (Mannigfaltigkeit): Eine glatte Mannigfaltigkeit (M, S) mit Struktur S , die kompakt und orientierbar ist, wird schlicht als *Mannigfaltigkeit* bezeichnet, wenn die Struktur aus dem Kontext klar ersichtlich ist.



(a) Das triviale Bündel $S^1 \times \mathbb{R}$ ist orientierbar. Die beiden Teile, in die das Bündel bei Entfernung des Nullschnittes zerfällt sind offensichtlich.



(b) Das Möbiusband ist nicht orientierbar, da die Entfernung des Nullschnittes nur *eine* Komponente hinterlässt, die sich zweimal um den Ursprung windet.

Abbildung 2.5: Verschiedene Bündel über der gleichen Mannigfaltigkeit können verschiedene Orientierbarkeitseigenschaften aufweisen.

Wenn also im Folgenden eine Mannigfaltigkeit M benannt wird, sind dabei implizit also stets die Kompaktheit, die Glattheit mit dazugehöriger Struktur und die Orientierbarkeit (nicht jedoch die Orientierung) eingeschlossen.

Mannigfaltigkeiten, die diesen Bedingungen nicht entsprechen oder Fälle, bei denen die Struktur eine Rolle spielt, werden entsprechend gekennzeichnet sein.

2.1.2 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Definition 2.12 (glatte Abbildungen): Seien (M, S) und (N, R) glatte Mannigfaltigkeiten unbestimmter Dimensionen.

Eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *glatt*, wenn für alle Karten $\varphi : U \rightarrow V$ mit $\varphi \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \in S$ um p gilt: $f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt.

Analog heißt eine stetige Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ *glatt*, wenn für alle $\varphi \in \mathfrak{A}$ und für alle $\psi \in \mathfrak{B}$ (und für alle Atlanten $\mathfrak{A} \in S$ und alle $\mathfrak{B} \in R$) gilt, dass $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.

Die Menge der glatten Abbildungen von M nach N wird bezeichnet mit

$$\mathcal{C}^\infty(M, N) = \{\Phi : M \rightarrow N : \Phi \text{ glatt}\}.$$

Nun, da wir glatte Abbildungen definiert haben, können wir sie benutzen, um den Begriff des Homöomorphismus anzupassen, so dass er besser zu unseren glatten Mannigfaltigkeiten passt.

Definition 2.13 (Diffeomorphismus): Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Ist die Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ glatt und bijektiv und auch Φ^{-1} ist glatt, so heißt Φ ein *Diffeomorphismus*.

Die glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißen *diffeomorph*, $M \cong N$, wenn es einen Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$ gibt.

Die Diffeomorphismen, die zwischen zwei Mannigfaltigkeiten existieren, tragen auch in sich eine weitere Struktur:

Definition 2.14: Für eine glatte Mannigfaltigkeit M bezeichnet man mit

$$\text{Diff}(M) := \{ \Phi : M \rightarrow M \mid \Phi \text{ ist Diffeomorphismus} \} = \mathcal{C}^\infty(M, M)$$

die Menge der Diffeomorphismen von M auf sich selbst. Diese bilden mit der Verknüpfung \circ offenbar eine Gruppe mit neutralem Element id , deshalb heißt sie auch die *Diffeomorphismengruppe* von M .

Aus der Gruppe der Diffeomorphismen werden wir in Kapitel 6 so genannte *Operationen* schöpfen.

Die Wichtigkeit des Begriffes „diffeomorph“ wird klar wenn man betrachtet, dass wir Mannigfaltigkeiten nur *bis auf Diffeomorphie* unterscheiden können.

Definition 2.15: Zwei Mannigfaltigkeiten, die diffeomorph sind, also $M \cong N$ mit einem Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$, werden im Folgenden als gleichwertig oder sogar als gleich bezeichnet:

$$M = N.$$

Formal gesehen betrachten wir also Äquivalenzklassen von Mannigfaltigkeiten unter der Relation der Diffeomorphismen.

Diese Bezeichnung der „Gleichheit“ von Mannigfaltigkeiten hat eine mengentheoretische Grundlage: Zwei Mengen werden als mengentheoretisch „gleich“ oder „gleichmächtig“ betrachtet, wenn es eine Bijektion zwischen diesen Mengen gibt. Entsprechend werden Mengen, die über eine zusätzliche Struktur verfügen als „gleich“, oder „isomorph“ betrachtet, wenn es eine Bijektion zwischen den Mengen gibt, die ebenfalls die Zusatzstruktur respektiert. Dies führt bei Vektorräumen zu Vektorraum-Isomorphismen, bei Gruppen zu Gruppen-Isomorphismen, bei topologischen Räumen zu Homöomorphismen und bei Mannigfaltigkeiten eben zu Diffeomorphismen. Ignoriert man die Morphismen innerhalb der verschiedenen Klassen und versucht sich an einer Klassifizierung der existierenden Objekte, so werden sich derart viele Möglichkeiten auftun, dass eine Klassifizierung nicht mehr möglich sein kann.

Es ist anzumerken, dass Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Dimension in jedem Fall nicht diffeomorph sein können.

Satz 2.16: *Zwei Mannigfaltigkeiten M^m und N^n unterschiedlicher Dimensionen $m \neq n$ sind nicht diffeomorph.*

BEWEIS: Angenommen, es gäbe einen Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$. Dann ist in jedem Punkt $p \in M$ das Differenzial $D\Phi_p : TM_p \rightarrow TN_{\Phi(p)}$ ein Vektorraumisomorphismus. Da $\dim(TM_p) = m \neq n = \dim(TN_{\Phi(p)})$ ist, existiert kein solcher Isomorphismus, folglich existiert auch kein Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$. ■

Wir haben damit bereits den ersten Schritt auf unserem Weg zur Klassifikation der Mannigfaltigkeiten getan: Es reicht stets aus, Diffeomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension zu suchen.

2.1.3 Einige ausgewählte Mannigfaltigkeiten

Die einfachste Mannigfaltigkeit, die es gibt, ist der gewöhnliche \mathbb{R}^n mit der Struktur der Identität, also $\mathfrak{A} = (\text{id})$ und damit als Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^n, [\mathfrak{A}])$. Leider ist der \mathbb{R}^n jedoch nicht kompakt, so dass wir hier nur Folgendes sagen können:

Satz 2.17: *Der \mathbb{R}^n mit der Struktur der Identität, $(\mathbb{R}^n, [\mathfrak{A}])$ mit $\mathfrak{A} = (\text{id})$, ist eine nicht-kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n .*

BEWEIS: Folgt sofort aus den Definitionen. ■

Die zweite Mannigfaltigkeit, die wir betrachten ist die Sphäre S^n , und diese ist auch wirklich kompakt, da sie bereits als Teilraum im \mathbb{R}^{n+1} kompakt ist:

Definition 2.18: Die Sphäre der Dimension n ist definiert als:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

Diese Definition als einfache Menge reicht jedoch leider noch nicht aus, um daraus eine glatte Mannigfaltigkeit zu machen.

Satz 2.19: *Die Menge S^n , zusammen mit den stereographischen Projektionen aus dem Nord- und dem Südpol heraus, ist eine Mannigfaltigkeit² der Dimension n .*

BEWEIS: Der Beweis hierzu findet sich in jedem grundlegenden Skript oder Buch über Differentialgeometrie, siehe z.B. [14]. ■

Modifiziert man die Definition der Sphäre ein wenig und „füllt die Kugel aus“, so erhält man den n -dimensionalen Ball, eine berandete Mannigfaltigkeit:

Definition 2.20: Der Ball der Dimension n ist definiert als

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Dadurch wird allerdings die Dimension erhöht (siehe Abb. 2.6):

Satz 2.21: *Auf der Menge B^n existiert eine Struktur $[\mathfrak{A}]$, so dass $(B^n, [\mathfrak{A}])$ zu einer berandeten Mannigfaltigkeit der Dimension n wird. (Ohne Beweis.)*

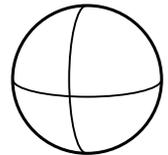
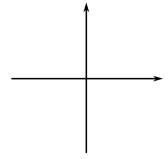
Eine letzte Mannigfaltigkeit, die wir in diesem Abschnitt betrachten können, ist der Torus T^n .

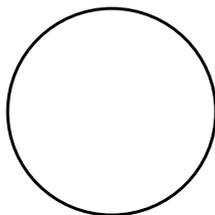
Definition 2.22: Die Mannigfaltigkeit T^n , der n -dimensionale Torus, $n \geq 2$, ist definiert als das n -fache Produkt von Kreisen S^1 ,

$$T^n = (S^1)^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}}.$$

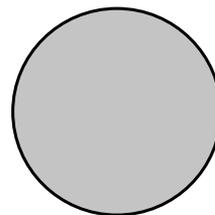
Es ist damit T^n automatisch eine Mannigfaltigkeit der Dimension n .

²Vgl. Definition 2.11, damit ist hier und nachfolgend stets eine kompakte, glatte Mannigfaltigkeit bezeichnet.





(a) Eine Einbettung der S^1 in den \mathbb{R}^2 (der \mathbb{R}^2 wird dargestellt durch das Blatt).



(b) Eine Einbettung des B^2 in den \mathbb{R}^2 . Der Rand ∂B^2 ist schwarz eingezeichnet; Punkte, die nicht auf dem Rand liegen in grau.

Abbildung 2.6: Sowohl die Sphäre S^{n-1} als auch der Ball B^n sind eingebettet in den \mathbb{R}^n . Diese Einbettungen unterscheiden sich aber in ihrer Dimension: Während die Sphäre S^{n-1} eine „echte“ Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n ist, ist der Ball B^n quasi ein „Teil“ des \mathbb{R}^n , hat also die gleiche Dimension. Diese Unterscheidung wird sofort deutlich, wenn man sich die Einbettungen betrachtet (siehe (a) und (b)).

Fasst man den Kreis S^1 als Einheitsintervall auf, wo die beiden Endpunkte miteinander identifiziert werden, erhält man eine weitere mögliche Darstellung des Torus:

Lemma 2.23: Die 1-Sphäre S^1 kann geschrieben werden als

$$S^1 = [0, 1] / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim die beiden Punkte $0 \sim 1$ miteinander identifiziert und alle anderen Punkte in einpunktige Äquivalenzklassen eingeordnet sind.

Entsprechend kann für jedes $n \geq 2$ der Torus \mathbb{T}^n geschrieben werden als

$$\mathbb{T}^n = [0, 1]^n / \sim .$$

BEWEIS: Die Abbildung $\text{ex} : [0, 1] / \sim \rightarrow S^1 : t \mapsto \exp(2\pi it)$ kann als Diffeomorphismus nachgewiesen werden.

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{t \mapsto e^{2\pi it}} & S^1 \subseteq \mathbb{C} \\
 \downarrow & \nearrow \text{ex} & \\
 [0, 1] / \sim & &
 \end{array}$$

■

Damit haben wir bereits drei sehr wichtige Klassen von Mannigfaltigkeiten gefunden: die einfachen, nicht-kompakten reellen Räume, die Sphären und die Tori. Die Frage, die sich an dieser Stelle natürlich auftut, ist, ob wir nicht etwa die gleiche Mannigfaltigkeit mehrmals definiert haben. Also, ob es Diffeomorphismen $\mathbb{E}^n \rightarrow S^n$ oder $S^n \rightarrow \mathbb{T}^n$

gibt. Die erste Frage ist leicht zu beantworten, da der euklidische Raum \mathbb{E}^n ja nicht einmal kompakt ist, eine solche Eigenschaft aber von jedem Homöomorphismus erhalten werden muss.

Die Frage aber, ob es einen Diffeomorphismus $S^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ gibt, muss für den Moment offen bleiben. Wir werden sie beantworten können, nachdem im folgenden Kapitel 3 die Fundamentalgruppe definiert wurde; im Abschnitt 3.4 wird schließlich eine Erläuterung der Antwort dargestellt.

Eine weitere Frage, die sich auf natürliche Weise an dieser Stelle ergibt, ist, ob nicht vielleicht schon *alle* Mannigfaltigkeiten auf diese Weise erfasst sind. Auch diese Frage kann an dieser Stelle noch nicht beantwortet werden, wir müssen uns bis zu Kapitel 5 gedulden, bevor eine erschöpfende Antwort (zumindest für den Spezialfall der Dimension 2) gegeben werden kann.

2.2 Gruppentheorie

Um die Betrachtung der Fundamentalgruppe, die ja selbst eine Gruppe ist, in den folgenden Kapiteln zu erleichtern, müssen wir einige, vergleichsweise exotische Gruppen definieren und betrachten. Vorausgesetzt wird, dass generelle Aussagen und Definitionen über Gruppen bekannt sind.

Definition 2.24: Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen. Man benennt als das *freie Produkt* $G_1 * G_2$ die Menge von *Worten* $g = g_1 g_2 \dots g_k$, für die gilt:

- Die *Länge* des Wortes ist $k \in \mathbb{N}$.
- Für „Buchstaben“ g_i gilt: $g_i \in G_1$ oder $g_i \in G_2$ für alle $i = 1, \dots, k$, und g_i und g_{i+1} sind nicht aus der gleichen Gruppe (für $i = 1, \dots, k - 1$).
- Für alle $i = 1, \dots, k$ gilt $g_i \neq 1 \in G_1$ und $g_i \neq 1 \in G_2$.

Das leere Wort $g =$ hat die Länge 0. Die Verknüpfung zweier Worte $g = g_1 \dots g_k$ und $h = h_1 \dots h_l$ geschieht durch Verkettung der Buchstaben und eine Reduktion auf Normalform. Die Verknüpfung ist also definiert als:

$$gh = g_1 \dots g_k h_1 \dots h_l$$

wobei anschließend innerhalb von G_1 und G_2 ausmultipliziert und Einselemente entfernt werden, bis die oben definierte Form erreicht ist.

Das freie Produkt zweier Gruppen wird mit dieser Verknüpfung wieder selbst zu einer Gruppe. Das Einselement dieser Gruppe ist das leere Wort, und das Inverse eines Elementes $g = g_1 \dots g_k$ ist $g^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1}$. Die ursprünglichen Gruppen G_1 und G_2 sind eingebettet in das freie Produkt $G_1 * G_2$ als die Worte der Länge 1, also $g = g_1$.

Auch Homomorphismen können auf diese Weise zusammengesetzt werden:

Kapitel 2. Grundlagen und Hilfsmittel

Lemma 2.25: Seien $\alpha_1 : H_1 \rightarrow G$ und $\alpha_2 : H_2 \rightarrow G$ Gruppenhomomorphismen. Dann ist

$$\alpha_1 * \alpha_2 : H_1 * H_2 \rightarrow G$$

mit

$$\alpha_1 * \alpha_2(h_1^{(i)} h_2^{(j)} \dots) = \alpha_1(h_1^{(i)}) \alpha_2(h_2^{(j)} \dots)$$

wobei $h_k^{(i)} \in H_i$ darstellen soll, ein Homomorphismus.

BEWEIS: Klar. ■

Da Gruppen, die als freie Produkte entstehen, recht schwierig auseinander zu halten sind, brauchen wir ein Kriterium, das uns dabei helfen kann.

Definition 2.26: Sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Man definiert den Kommutator von g und h als

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Die Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ der Gruppe G ist die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G , also

$$[G, G] := \langle \{[g, h] : g, h \in G\} \rangle.$$

Im Allgemeinen ist die Menge der Kommutatoren nicht abgeschlossen unter Multiplikation, weshalb hier die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe benutzt werden muss.

Die Kommutatoruntergruppe einer Gruppe G kann nun benutzt werden, um den „abelschen Teil“ einer Gruppe zu finden:

Definition 2.27: Die Abelianisierung einer Gruppe G ist die Gruppe

$$G^{\text{ab}} := G/[G, G].$$

Dafür müssen wir nachprüfen, dass $G' := [G, G]$ ein Normalteiler ist. Da

$$a \cdot [g, h] \cdot a^{-1} = a \cdot ghg^{-1}h^{-1}a^{-1} = ((ag)h(ag)^{-1}h^{-1}) (hah^{-1}a^{-1}) = [ag, h][h, a]$$

Produkt von Kommutatoren ist, liegt $a[g, h]a^{-1} \in G'$, und G' ist somit ein Normalteiler in G .

Lemma 2.28: Die Abelianisierung einer beliebigen Gruppe G ist abelsch.

BEWEIS: Seien $\bar{g}, \bar{h} \in G^{\text{ab}}$, d.h. $\bar{g} = g[G, G]$ und $\bar{h} = h[G, G]$. Dann ist $\bar{g}\bar{h} = gh[G, G]$ und insbesondere $gh[h, g] \in \bar{g}\bar{h}$. Es ist aber $gh[h, g] = gh h^{-1}g^{-1}hg = hg = hg[\text{id}, \text{id}] \in \bar{g}\bar{h}$. Damit ist

$$\bar{g}\bar{h} = \overline{gh} = \overline{hg} = \bar{h}\bar{g}$$

und somit G^{ab} kommutativ. ■

Sobald beide Faktoren nicht trivial sind, ist das freie Produkt zweier Gruppen nicht abelsch, was direkt an den zwei Wörtern $g_1 h_1 \neq h_1 g_1$ deutlich wird. Die Abelianisierung hiervon ist allerdings interessant:

Lemma 2.29: Die Abelianisierung eines freien Produkts $G_1 * G_2$ aus Gruppen G_1, G_2 ist das cartesische Produkt der abelianisierten Gruppen $G_1^{\text{ab}} \times G_2^{\text{ab}}$.

BEWEIS: Sei $f : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$ die durch Ausmultiplizieren erzeugte Abbildung, also

$$f(g) = f(g_1 g_2 \dots g_k) = \left(\prod_{g_i \in G_1} g_i, \prod_{g_i \in G_2} g_i \right).$$

Dann ist f mit Sicherheit ein Homomorphismus und surjektiv. Auch die Abbildung $ab : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1^{\text{ab}} \times G_2^{\text{ab}}$ ist ein surjektiver Homomorphismus, und damit ist $f_{\text{ab}} := ab \circ f$ ebenfalls ein surjektiver Homomorphismus. Nach dem Homomorphiesatz ist damit $(G_1 * G_2) / \ker(f_{\text{ab}}) \cong \text{im}(f_{\text{ab}}) = G_1^{\text{ab}} \times G_2^{\text{ab}}$.

$$\begin{array}{ccc} G_1 * G_2 & \xrightarrow{f} & G_1 \times G_2 \\ \downarrow & \searrow f_{\text{ab}} & \downarrow ab \\ (G_1 * G_2) / \ker(f_{\text{ab}}) & \xrightarrow{\cong} & G_1^{\text{ab}} \times G_2^{\text{ab}} \end{array}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $\ker(f_{\text{ab}}) = [G_1 * G_2, G_1 * G_2]$ ist.

Damit ist $(G_1 * G_2)^{\text{ab}} = (G_1 * G_2) / [G_1 * G_2, G_1 * G_2] \cong G_1^{\text{ab}} \times G_2^{\text{ab}}$. ■

Wir können mit diesem Lemma also solche freien Produkte auseinander halten, deren Abelianisierungen sich in mindestens einem Faktor unterscheiden.

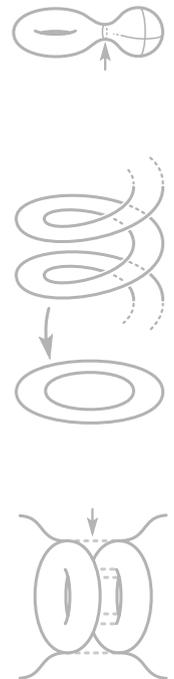
Damit schließen wir unsere kurzen Betrachtungen über freie Produkte ab und können jetzt zu der Definition der Fundamentalgruppe übergehen.

3 Die Fundamentalgruppe

Im vorangegangenen Kapitel haben wir definiert, dass zwei Mannigfaltigkeiten als „gleich“ oder „gleichwertig“ gelten sollen, wenn ein Diffeomorphismus existiert, der die eine Mannigfaltigkeit in die andere überführt. Leider stellt sich heraus, dass es sehr schwierig ist, solche Diffeomorphismen zu finden und meist noch schwieriger, zu zeigen, dass kein solcher Diffeomorphismus existieren kann.

Aus diesem Grunde suchen wir eine Möglichkeit, Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden, das heißt, eine Eigenschaft oder eine Invariante zu finden, die durch Diffeomorphismen nicht verändert wird. Haben wir ein solches Objekt gefunden, wird die Unterscheidungen von Mannigfaltigkeiten vereinfacht: unterscheiden sich die gefundenen Objekte, so unterscheiden sich auch die Mannigfaltigkeiten. Unterscheiden sich die gefundenen Objekte jedoch *nicht*, so haben wir nichts gewonnen und können keine Aussagen über Diffeomorphie oder Nichtdiffeomorphie der Mannigfaltigkeiten treffen.

Die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit ist eine Gruppe, die auf Grund der topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit ausgewählt wird. Es wird sich zeigen, dass die Fundamentalgruppe die oben gewünschte Eigenschaft erfüllt und somit als Unterscheidungsmerkmal für Mannigfaltigkeiten gelten kann. Wir werden ebenfalls sehen, dass die Fundamentalgruppe mächtig genug ist, um schon eine sehr genaue Unterscheidung zu treffen, so dass beispielsweise die Mannigfaltigkeiten der Dimension 2, die Flächen, bereits komplett erfasst werden können (siehe Kapitel 5).



3.1 Homotopie

Die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit ist die erste Homotopiegruppe des topologischen Raumes. Daher wird im Folgenden die erste Homotopiegruppe definiert und deren Eigenschaften ausgemacht.

Definition 3.1 (Homotopie): Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen auf topologischen Räumen X und Y . Sie heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt: $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$; die Abbildung H heißt dann *Homotopie* von f nach g . Man schreibt auch $H : f \simeq g$ oder $f \simeq g$ mittels H .

Oftmals ist es hilfreich, sich Homotopie als ein „zeitliches“ Verschieben der einen Abbildung in die andere vorzustellen. Dabei ist der Parameter $s \in [0, 1]$ der Homotopie der Zeitparameter. Für jedes $x \in X$ wird durch die Homotopie H der Punkt $f(x) = H(x, 0) \in Y$ entlang des Weges $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow Y, \alpha_x(s) = H(x, s)$ von $f(x)$ nach $g(x)$ verschoben. Die Benennung des Zeitparameters mit der Variable s rührt daher, dass bei

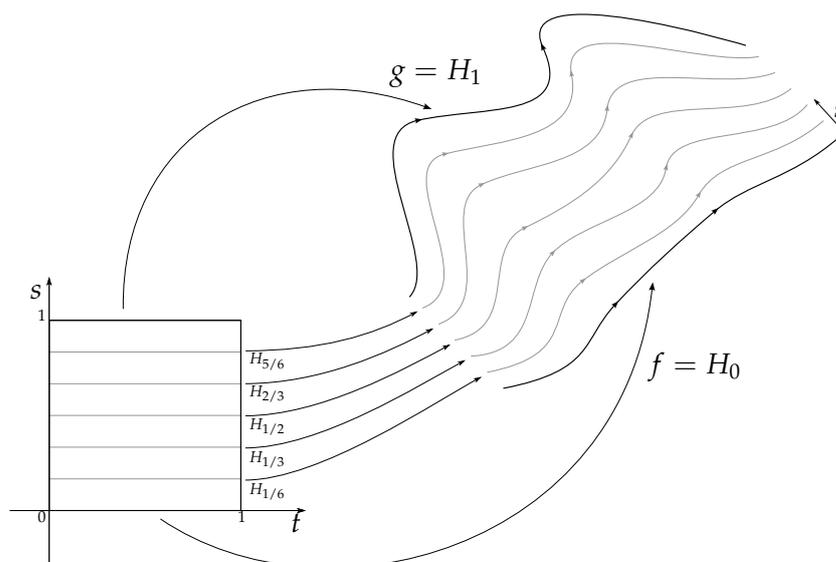


Abbildung 3.1: Eine Homotopie zweier Pfade verschiebt die Punkte des einen Pfades $f = H_0$ entlang der Wege $\alpha_t(s) = H_s(t)$ von H_0 nach $g = H_1$. Die Homotopie H ist auf $[0, 1] \times [0, 1]$ definiert.

Homotopien von *Pfaden*, wie sie in 3.1.1 definiert wird, der Variablenname t schon als Zeitparameter für den Pfad verwendet wird; siehe hierzu auch 3.1.

Benennt man andererseits für jedes $s \in [0, 1]$ die Abbildung $h_s : X \rightarrow Y : h_s(x) = H(x, s)$, so erhält man die zeitlichen „Zwischenstufen“ der Homotopie. Man bezeichnet dann auch die (stetige) Familie $(h_s)_{s \in [0, 1]}$ als Homotopie von f nach g .

Die Bedeutung der Homotopie zeigt sich darin, dass sie stetige Funktionen zu Äquivalenzklassen zusammenfasst:

Lemma 3.2: Die Homotopierelation „ \simeq “ ist auf $\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ stetig}\}$ eine Äquivalenzrelation.

BEWEIS: Die bekannten drei Eigenschaften von Äquivalenzrelationen sind zu zeigen:

- Es ist $f \simeq f$ via der konstanten Homotopie $H_f(x, t) = f(x)$.
- Für $f \simeq g$ mit der Homotopie H ist die umgekehrt durchlaufene Abbildung $H(x, 1 - t)$ eine Homotopie von g nach f , also $g \simeq f$.
- Seien $f \simeq g$ mittels H und $g \simeq h$ mittels H' . Dann ist die Abbildung

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

stetig, da $H(x, 1) = H'(x, 0)$ ist für alle $x \in X$. Damit ist \tilde{H} eine Homotopie von f nach h , und somit $f \simeq h$. ■

Es fehlen nun noch Bezeichnungen, die wir benutzen können, um Äquivalenzklassen im Allgemeinen und eine spezielle Klasse im Besonderen kennzeichnen zu können.

Definition 3.3: Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ unter der Homotopierelation \simeq bezeichnen wir als $[f]$. Eine stetige Abbildung $g : X \rightarrow Y$, die homotop zu einer konstanten Abbildung $c_{y_0} : X \rightarrow Y : x \mapsto y_0$ ist, $[g] = [c_{y_0}]$, wird *nullhomotop* genannt.

Die Klasse der nullhomotopen Abbildungen wird bald sehr wichtig sein, da sie das neutrale Element der Fundamentalgruppe darstellen wird. Dafür notwendig ist, dass wir eine Verknüpfung von Abbildungsklassen finden und dass das Nullelement eindeutig ist.

Lemma 3.4: Für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ ist

$$[g] \cdot [f] := [g \circ f]$$

wohldefiniert.

BEWEIS: Seien dazu $f \simeq f'$ mittels F und $g \simeq g'$ mittels G . Setze dann $H_1 = g' \circ F$. Damit ist bereits $g' \circ f \simeq g' \circ f'$ mittels H_1 . Setze weiter $H_2 : X \times [0, 1] \rightarrow Z : H_2(x, t) = G(f(x), t)$. Somit ist H_2 eine Homotopie von $g \circ f$ zu $g' \circ f$. Insgesamt ergibt sich:

$$g \circ f \simeq_{H_2} g' \circ f \simeq_{H_1} g' \circ f'. \quad \blacksquare$$

Lemma 3.5 (und Definition): Seien $c_{y_1} : X \rightarrow Y$ und $c_{y_2} : X \rightarrow Y$ zwei konstante Abbildungen und Y wegzusammenhängend¹. Dann sind $c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ homotop. Man nennt daher $0 := [c_y]$ die Klasse der konstanten Abbildungen, da für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $c_x : W \rightarrow X$ konstant, $\tilde{c}_z : X \rightarrow Z$ konstant und $c_z : Y \rightarrow Z$ konstant gilt:

$$\begin{aligned} [f] \cdot 0 &= [f] \cdot [c_x] = [f \circ c_x] = [c_{f(x)}] = 0 \\ 0 \cdot [f] &= [c_z] \cdot [f] = [c_z \circ f] = [\tilde{c}_z] = 0 \end{aligned}$$

BEWEIS: Seien $c_{y_1}, c_{y_2} : X \rightarrow Y$ zwei konstante Abbildungen. Da Y wegzusammenhängend ist, existiert $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg mit Anfangspunkt y_1 und Endpunkt y_2 . Die Abbildung $H : X \times [0, 1] : H(x, t) = \alpha(t)$ ist damit eine Homotopie $c_{y_1} \simeq c_{y_2}$. ■

3.1.1 Homotopie von Pfaden

Definition 3.6: Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ heißt *Pfad auf X* oder *Weg auf X* . Eine stetige Abbildung $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\beta(0) = \beta(1) =: p$ heißt *geschlossener Pfad mit Aufpunkt p* . Die Menge der geschlossenen Pfade mit Aufpunkt p ist

$$\mathcal{C}(p) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ Pfad} : \alpha(0) = \alpha(1) = p\}.$$

¹Nach der Definition von Mannigfaltigkeiten (Definition 2.11) sind diese stets wegzusammenhängend, diese Bedingung stellt also keine wirkliche Einschränkung für uns dar.

Kapitel 3. Die Fundamentalgruppe

Definition 3.7: Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Seien weiter α und β zwei Pfade auf X mit Aufpunkt $p \in X$. Die Pfade heißen *homotop* (oder *homotop relativ* $\{0, 1\}$), wenn sie als stetige Abbildungen homotop sind und die Homotopie den Aufpunkt respektiert, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$, $H(0, s) = H(1, s) = p$ für alle $s, t \in [0, 1]$.

Im Sinne von Definition 3.3 sind alle Wege nullhomotop. Aus diesem Grund muss die Homotopie für Pfade neu definiert werden, so dass ein geschlossener Pfad auch *während* der Homotopie die gesamte Zeit geschlossen bleibt.

Definition 3.8: Wege in $\mathcal{C}(p)$ werden durch Zusammenfügen verknüpft. Für zwei Wege $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(p)$ ist

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

die Hintereinanderausführung von α und β (siehe auch Abb. 3.2)

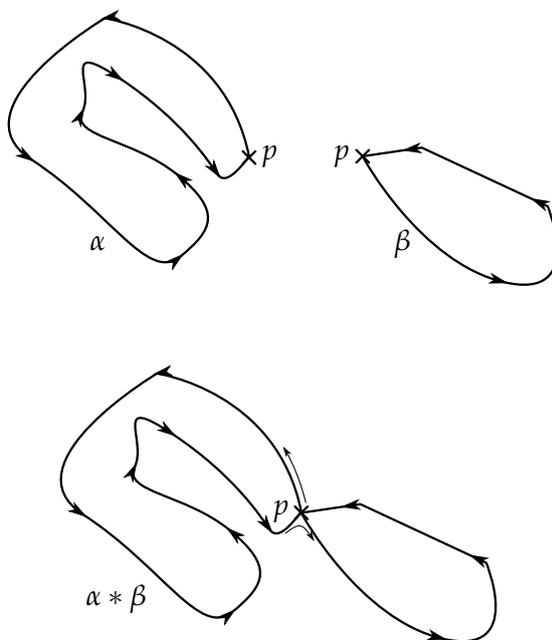


Abbildung 3.2: Pfade werden verknüpft durch hintereinander ausführen. Der Mittelpunkt, also $(\alpha * \beta)(1/2)$, liegt dann wieder auf p , $(\alpha * \beta)(1/2)(0) = (\alpha * \beta)(1/2) = (\alpha * \beta)(1) = p$.

Diese Verknüpfung kann auch auf Klassen von Pfaden ausgeweitet werden:

Lemma 3.9: Die Verknüpfung $*$ ist wohldefiniert auf den Äquivalenzklassen von Pfaden, d.h.

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta]$$

ist wohldefiniert für Pfade $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(p)$.

BEWEIS: Seien $(\alpha_t)_{t \in [0,1]} : \alpha_0 \simeq \alpha_1$ und $(\beta_t)_{t \in [0,1]} : \beta_0 \simeq \beta_1$. Dann ist $(\alpha_t * \beta_t)_{t \in [0,1]}$ Homotopie zwischen $\alpha_0 * \beta_0$ und $\alpha_1 * \beta_1$.

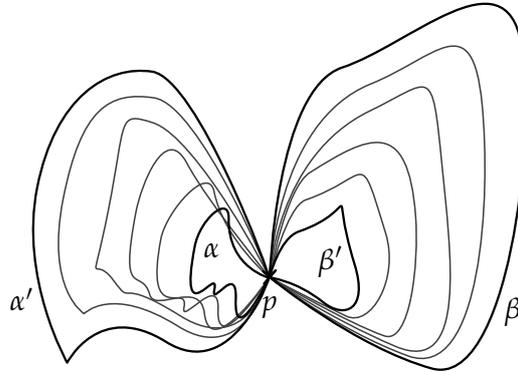


Abbildung 3.3: Homotopien können wie Pfade verkettet werden. Es ergibt sich eine Homotopie der verketteten Pfade, die sogar relativ $\{0, 1/2, 1\}$ ist.

Auch unterschiedliche parametrisierte Wege sind homotop, fallen also in die gleiche Klasse:

Definition 3.10: Sei $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ und $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann heißt φ eine *Reparametrisierung* und $\alpha \circ \varphi$ eine *Reparametrisierung von α* .

Lemma 3.11: Sei $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ ein geschlossener Weg und $\alpha \circ \varphi$ eine Reparametrisierung. Dann sind $\alpha \simeq \alpha \circ \varphi$ homotop, also $[\alpha] = [\alpha \circ \varphi]$.

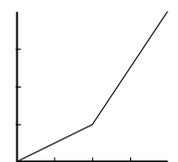
BEWEIS: Definiere $\alpha_s(t) := \alpha((1-s)t + s\varphi(t))$. Dann ist $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi$ und $\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = \alpha(0) = \alpha(1) = p$. Damit ist $(\alpha_s)_{s \in [0,1]}$ eine Homotopie von α nach $\alpha \circ \varphi$. ■

Die Verknüpfung $*$ ist leider auf der Menge der Pfade nicht assoziativ, denn für drei Pfade $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(p)$ haben $\alpha * (\beta * \gamma)$ und $(\alpha * \beta) * \gamma$ zwar das gleiche Bild, sind aber unterschiedlich parametrisiert. Dieses Manko wird jedoch durch die Homotopie behoben.

Lemma 3.12: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(p)$ drei Wege in X . Dann ist

$$[\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma].$$

BEWEIS: Die Wege $\alpha * (\beta * \gamma)$ und $(\alpha * \beta) * \gamma$ sind Reparametrisierungen voneinander. Genauer: Sei $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und stückweise linear mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1/2) = 1/4$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist φ eine Reparametrisierung, und $(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \varphi = (\alpha * \beta) * \gamma$. Nach Lemma 3.11 sind also $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ homotop. ■



Darstellung von φ

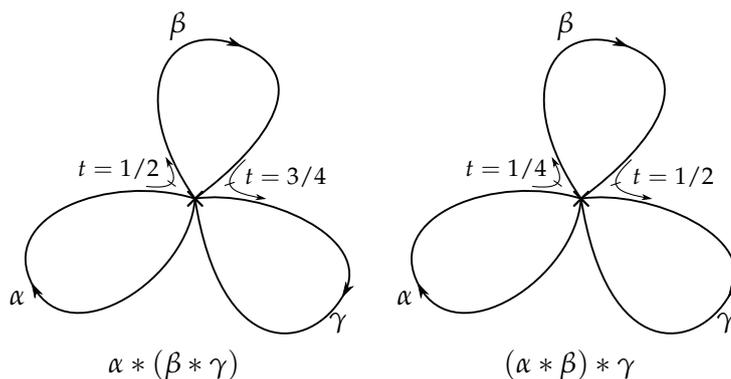


Abbildung 3.4: Die Parametrisierungen von $\alpha * (\beta * \gamma)$ und $(\alpha * \beta) * \gamma$ unterscheiden sich.

Nun haben wir für unsere gewünschte Gruppenstruktur bereits herausgefunden, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Es folgt das neutrale Element der Gruppe, welches der konstante Pfad ist.

Lemma 3.13: Die Verknüpfung eines Pfades $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ mit dem konstanten Pfad $c_p : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto p$ auf dem Aufpunkt p ist eine Reparametrisierung von α , und damit

$$[\alpha][c_p] = [c_p][\alpha] = [\alpha].$$

BEWEIS: Seien $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Dann sind $\alpha \circ \varphi_1 = \alpha * c_p$ und $\alpha \circ \varphi_2 = c_p * \alpha$, und folglich nach Lemma 3.11 homotop. ■

Das Einzige, was noch zu einer Gruppenstruktur fehlt, sind inverse Elemente, welche nun definiert werden.

Definition 3.14: Zu einem Pfad $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ wird der zu α inverse Weg als der umgekehrt durchlaufene Weg bezeichnet, also

$$\alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto \alpha(1 - t).$$

Die Bezeichnung „inverser Weg“ ist nicht zufällig gewählt: Verknüpft man einen Weg mit seinem Inversen, so erhält man eine „Schleife“, die nur einmal aus p herausläuft und dann durch die gleichen Punkte wieder zurück. Diese Schleife kann in jedem Fall zugezogen werden, das heißt, die Schleife ist nullhomotop (siehe auch Abb. 3.5):

Lemma 3.15: Die Verknüpfung eines Pfades $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ mit seinem Inversen α^{-1} ist homotop zum konstanten Pfad c_p .

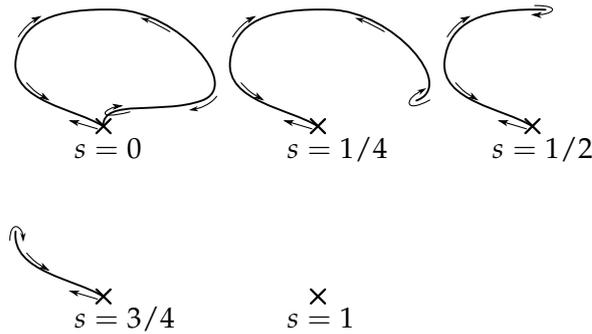


Abbildung 3.5: Die „Schleife“, die von dem Pfad beschrieben wird, wird durch die Homotopie immer mehr verkürzt, bis sie schließlich zum konstanten Pfad wird.

BEWEIS: Wir geben eine Homotopie direkt an:

$$H(s, t) = \begin{cases} (\alpha * \alpha^{-1})(s) & \text{für } s \leq \frac{1}{2}(1-t) \\ (\alpha * \alpha^{-1})(t) & \text{für } \frac{1}{2}(1-t) < s < \frac{1}{2}(1+t) \\ (\alpha * \alpha^{-1})(s) & \text{für } s \geq \frac{1}{2}(1+t). \end{cases}$$

Für jedes $t \in [0, 1]$ „hält“ die Schleife also für ein Intervall der Länge $\frac{t}{2}$ an, für $t = 0$ entspricht dies dem ursprünglichen Pfad, für $t = 1$ dem konstanten Pfad. Da $(\alpha * \alpha^{-1})(\frac{1}{2}(1-t)) = (\alpha * \alpha^{-1})(\frac{1}{2}(1+t))$, ist H stetig und somit eine Homotopie $H : \alpha * \alpha^{-1} \simeq c_p$. ■

Wir haben also Glück, und die Inversenbildung aus 3.14 passt mit unserem neutralen Element c_p zusammen, so dass wir schließlich eine Gruppe aus den Pfaden bilden können.

Satz 3.16: Die Menge der geschlossenen Pfade bildet unter Homotopie eine Gruppe $\mathcal{C}(p) / \simeq$ mit dem von $*$ induzierten Produkt und dem Einselement $[c_p]$.

BEWEIS: Assoziativität des Produktes erhalten wir aus Lemma 3.11, das Einselement ist $[c_p]$ nach Lemma 3.13, und das Inverse eines Pfades $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ ist sein inverser Pfad α^{-1} nach Lemma 3.15. ■

Diese Gruppe wird im weiteren Verlauf eine sehr große Rolle spielen, denn sie ist das Werkzeug, das wir benutzen werden, um Mannigfaltigkeiten auseinander zu halten. Aus diesem Grund bekommt sie einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol.

Definition 3.17: Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Die Menge

$$\pi_1(X, p) = \{[\alpha] : \alpha \text{ geschlossener Pfad in } X\},$$

d.h. die Menge der Äquivalenzklassen von geschlossenen Pfaden unter Homotopie, heißt dann *Fundamentalgruppe von X zum Punkt p* , $\pi_1(X, p)$ oder auch *erste Homotopiegruppe von X zum Punkt p* . Nach Satz 3.16 ist dies wirklich eine Gruppe.

Wir haben also jeden punktierten topologischen Raum mit einer zugeordneten Gruppe ausgestattet. Wie sich bald zeigen wird, ist der Zusammenhang zwischen Raum und Gruppe sehr eng, so dass wir durch diese Identifikation bereits sehr viele Aussagen über die zugehörigen Objekte machen können.

3.1.2 Verschiedene Aufpunkte

Tatsächlich spielt der gewählte Aufpunkt der Pfade keine so große Rolle: wählen wir einen anderen Aufpunkt, so bekommen wir eine andere Fundamentalgruppe, die aber isomorph zur zuerst gewählten ist. Da wir Gruppen im Allgemeinen nur bis auf Isomorphie unterscheiden, reicht dies also völlig aus.

Satz 3.18: Für einen topologischen Raum X sind $\pi_1(X, p)$ und $\pi_1(X, q)$ isomorphe Gruppen, wenn p und q in der gleichen Wegzusammenhangskomponenten liegen. Genauer: Sind $p, q \in X$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von p nach q , so ist

$$\varphi : \pi_1(X, q) \rightarrow \pi_1(X, p) : [\beta] \mapsto [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$$

ein Isomorphismus.

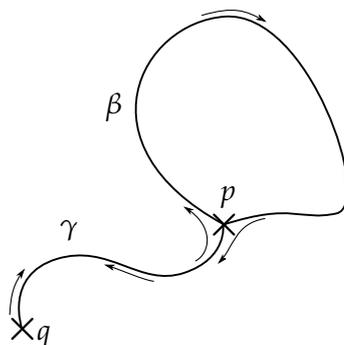


Abbildung 3.6: Aus einem Weg γ von q zu p und einem geschlossenen Pfad β mit Aufpunkt p wird ein geschlossener Pfad $\gamma * \beta * \gamma^{-1}$ mit Aufpunkt q .

BEWEIS: Sind $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}(p)$ mit $(\beta_s)_{s \in [0,1]} : \beta_0 \simeq \beta_1$, dann ist $(\gamma * \beta_s * \gamma^{-1})_{s \in [0,1]} : \gamma * \beta_0 * \gamma^{-1} \simeq \gamma * \beta_1 * \gamma^{-1}$ und somit ist φ wohldefiniert.

Weiter ist für $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(p)$

$$\begin{aligned} [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}][\gamma * \beta * \gamma^{-1}] &= [\gamma * \alpha * \gamma^{-1} * \gamma * \beta * \gamma^{-1}] \\ &\stackrel{(*)}{=} [\gamma * \alpha * \beta * \gamma^{-1}] \end{aligned}$$

Die Gleichheit $(*)$ ist mit den bekannten Techniken leicht einzusehen, siehe z.B. den Beweis zu Lemma 3.15. Somit ist aber $\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha])\varphi([\beta])$ und φ somit ein Homomorphismus. Da $\gamma * \gamma^{-1} = c_p$ und $\gamma^{-1} * \gamma = c_q$ ist

$$\psi : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q) : [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

invers zu φ , es ist $\varphi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \varphi = \text{id}$ und somit φ ein Gruppenisomorphismus. ■

Indem wir also von einer Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$ mittels einer Verknüpfung von Pfaden (siehe auch Abb. 3.6) zu einer isomorphen Gruppe $\pi_1(X, q)$ übergehen, können wir den Aufpunkt in einer Zusammenhangskomponente beliebig wählen, sofern es bei der Unterscheidung von Gruppen nur um Isomorphie geht.

Definition 3.19: Wir nennen daher die punktierte Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$ auch einfach $\pi_1(X)$, wenn die gewünschte Wegzusammenhangskomponente klar ist. Für Mannigfaltigkeiten, die in Definition 2.11 als zusammenhängend definiert wurden und für die die Begriffe zusammenfallen, ist dies also immer der Fall.

Besonders einfache Räume, solche in denen die Fundamentalgruppe trivial ist, bekommen einen speziellen Namen, welcher beispielsweise auch in der Funktionentheorie zur Anwendung kommt.

Definition 3.20: Ein wegzusammenhängender Raum X , in dem jeder geschlossene Weg nullhomotop ist, heißt *einfach zusammenhängend*. In diesem Fall ist also

$$\pi_1(X) = (1).$$

Diese Bezeichnung geht zurück auf Riemann, der noch nicht die Definitionen der modernen Topologie zur Verfügung hatte und somit andere Begriffe wählen musste. Riemann definierte für Flächen den Begriff des n -fachen Zusammenhangs einer Oberfläche als die maximale Anzahl von Kreisen, an denen eine Oberfläche aufgeschnitten werden kann, ohne in zwei Teile zu zerfallen, plus eins (siehe dazu auch [4, Chapter 9]). Zum Beispiel zerfällt ein Torus erst beim zweiten Schnitt in zwei Teile, er ist also zweifach zusammenhängend. Andererseits zerfällt eine Kugel durch jeden einzelnen Schnitt in zwei Teile, ist also *einfach zusammenhängend* im Sinne von Riemann. Dass dies auch mit

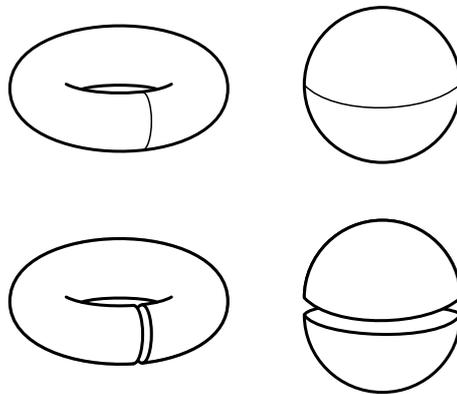


Abbildung 3.7: Torus und Sphäre unterscheiden sich durch den Grad des Zusammenhangs. Während eine Kugel durch jeden vollen Kreis in zwei Teile geschnitten wird, passiert dies beim Torus nicht für alle Kreise.

unserem Begriff übereinstimmt, werden wir in Abschnitt 4.3 beweisen.

3.2 Produkte von Mannigfaltigkeiten

Eine wichtige Klasse von Mannigfaltigkeiten sind solche, die sich als Produkt aus zwei Mannigfaltigkeiten niedriger Dimension darstellen lassen. Die Fundamentalgruppe solcher Produkte lässt sich leicht herausfinden: es ist einfach das Produkt der Fundamentalgruppen². Damit stellt das Produkt den ersten Konstruktionsmechanismus für Mannigfaltigkeiten dar, den wir benutzen werden, um Mannigfaltigkeiten zu finden.

Satz 3.21: Für eine Mannigfaltigkeit M , die als Produkt zweier Mannigfaltigkeiten N_1 und N_2 geschrieben werden kann, $M = N_1 \times N_2$ gilt:

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(N_1) \times \pi_1(N_2).$$

BEWEIS: Seien $p_i : N_1 \times N_2 \rightarrow N_i$ für $i = 1, 2$ die Projektionen auf die Faktoren, so zeigen wir, dass

$$\varphi : \pi_1(N_1 \times N_2) \rightarrow \pi_1(N_1) \times \pi_1(N_2) : [\alpha] \mapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha])$$

ein Isomorphismus ist.

- φ ist mit Sicherheit ein Homomorphismus und wohldefiniert, denn es ist

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha][\beta]) &= \varphi([\alpha * \beta]) = ([p_1 \circ (\alpha * \beta)], [p_2 \circ (\alpha * \beta)]) \\ &= ([p_1 \circ \alpha * p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \alpha * p_2 \circ \beta]) \\ &= ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) * ([p_1 \circ \beta], [p_2 \circ \beta]) \\ &= \varphi([\alpha]) \cdot \varphi([\beta]) \end{aligned}$$

- Injektivität: Falls $\varphi([\alpha]) = (1_{\pi_1(N_1)}, 1_{\pi_1(N_2)})$, so gilt komponentenweise, dass $H_1 : p_1 \circ \alpha \simeq c_{N_1}$ und $H_2 : p_2 \circ \alpha \simeq c_{N_2}$. Damit ist $H := H_1 \times H_2$ eine Homotopie und es gilt $H : \alpha \simeq C_{(N_1, N_2)}$, folglich ist φ injektiv.
- Seien $[\alpha_1] \in \pi_1(N_1)$ und $[\alpha_2] \in \pi_1(N_2)$ beliebig, so setze $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Damit ist α ein (geschlossener) Pfad in $N_1 \times N_2$, und da $p_i(\alpha) = \alpha_i$ ist, folgt, dass $\varphi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$ ist, also dass φ auch surjektiv ist.

Damit ist φ also ein bijektiver Gruppenhomomorphismus und somit ein Gruppenisomorphismus. ■

3.3 Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten

Um die Fundamentalgruppe zu einer wirklichen topologischen Invarianten zu machen, fehlt noch eins: die Unterscheidbarkeit von topologischen Räumen anhand der Invariante.

²Tatsächlich lässt sich dieses Ergebnis vergleichsweise leicht über die Kategorientheorie beweisen: Der Funktor $\pi_1 : \overline{Top}_0 \rightarrow \overline{Grp}$ respektiert Produkte, wobei dafür aber zuerst genau definiert werden muss, was ein Produkt in einer Kategorie überhaupt ist.

Satz 3.22: Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten mit $\pi_1(M_1) \not\cong \pi_1(M_2)$, so existiert kein Homöomorphismus (und damit insbesondere auch kein Diffeomorphismus) $\psi : M_1 \rightarrow M_2$.

BEWEIS: Wir beweisen die Umkehrung: Seien M_1 und M_2 homöomorph via $\tilde{\psi} : M_1 \rightarrow M_2$. Dann ist $\psi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2) : [\alpha] \mapsto [\tilde{\psi} \circ \alpha]$ ein Isomorphismus:

- Für zwei Pfade $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}(M_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi([\alpha_1 * \alpha_2]) &= [\tilde{\psi} \circ (\alpha_1 * \alpha_2)] = [(\tilde{\psi} \circ \alpha_1) * (\tilde{\psi} \circ \alpha_2)] \\ &= [\tilde{\psi} \circ \alpha_1] \cdot [\tilde{\psi} \circ \alpha_2] = \psi(\alpha_1) \cdot \psi(\alpha_2). \end{aligned}$$

Also ist ψ ein Homomorphismus.

- Die Abbildung $\psi^{-1} : \pi_1(M_2) \rightarrow \pi_1(M_1) : [\beta] \mapsto [\tilde{\psi}^{-1} \circ \beta]$ ist die Umkehrabbildung von ψ . Sei dazu $\alpha \in \pi_1(M_1)$, dann ist $\psi^{-1} \circ \psi([\alpha]) = [\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi} \circ \alpha] = [\alpha]$, es ist also $\psi \circ \psi^{-1} = \text{id}$. Analog zur oberen Darstellung ist ψ^{-1} ein Homomorphismus.
- Umgekehrt ist auch $\psi^{-1} \circ \psi = \text{id}$.

Damit ist ψ insgesamt ein Isomorphismus. ■

Mit diesem Satz haben wir schließlich die Ankündigung vom Anfang des Kapitels erfüllt: wir können jetzt Mannigfaltigkeiten anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden. Haben zwei Mannigfaltigkeiten Fundamentalgruppen, die nicht isomorph sind, wissen wir sofort, dass es keinen Diffeomorphismus geben kann.

Es ist jedoch wichtig, zu beachten, dass wir nur eine *trennende* Eigenschaft gefunden haben, denn die Fundamentalgruppe gibt eben nur einen gewissen Teil der topologischen Information in M wieder. Da es jedoch leichter ist, Gruppen zu unterscheiden als Mannigfaltigkeiten, und da durch die Fundamentalgruppe trotzdem noch eine große Menge an Mannigfaltigkeiten getrennt werden kann (vgl. Kapitel 7), lohnt es sich doch meist, die Fundamentalgruppe zu berechnen und erst, wenn dieser Versuch fehl schlägt, nach anderen Merkmalen zu suchen.

3.4 Wichtige Beispiele

Wir können nun damit beginnen, einige Mannigfaltigkeiten zu untersuchen und deren Fundamentalgruppen zu bestimmen. Die aus den Definitionen 2.18 und 2.22 bekannten Mannigfaltigkeiten sollen dabei als erste Grundlage dienen.

Satz 3.23: Die Fundamentalgruppe des reellen Raumes \mathbb{R}^n beliebiger Dimension n , ist trivial:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = (1).$$

BEWEIS: Laut 3.18 sind die Fundamentalgruppen bei abweichender Wahl von Aufpunkten isomorph, wenn es einen Pfad zwischen den gewählten Punkte gibt. Da

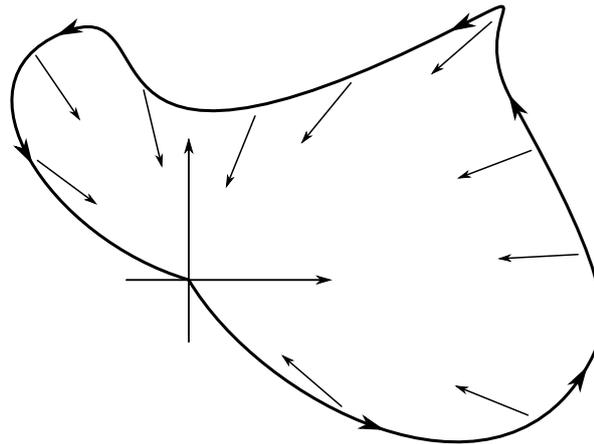


Abbildung 3.8: Ein Pfad in \mathbb{E}^n ist homotop zum konstanten Pfad durch stetiges zusammenziehen auf den Nullpunkt.

\mathbb{R}^n wegzusammenhängend ist, können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen.

Sei $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein geschlossener Pfad mit Aufpunkt $0 = \alpha(0)$. Die geradlinige Zusammenziehung $H(s, t) = (1 - s)\alpha(t)$ auf den Ursprung ist eine Nullhomotopie. Folglich sind alle Pfade in der Klasse $[0]$, und somit ist die Fundamentalgruppe trivial. ■

Satz 3.24: Die Fundamentalgruppe des Kreises, also der 1-Sphäre, ist

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

BEWEIS: Wir benötigen einige Vorarbeit, der Beweis wird deshalb in Abschnitt 3.5 durchgeführt. ■

Der Kreis, die Sphäre der Dimension 1 stellt eine Ausnahme unter den Sphären dar, denn sie ist die einzige, die keine triviale Fundamentalgruppe hat. Es ist wichtig zu beachten, dass $S^2 \neq S^1 \times S^1$ ist, sondern separat definiert wird. Ebenso ist S^n kein Produkt aus Sphären niedrigerer Dimensionen.

Satz 3.25: Die Fundamentalgruppe der Sphäre der Dimension $n \geq 2$ ist trivial, also

$$\pi_1(S^n) = (1).$$

Es ist möglich, diesen Beweis elementar durchzuführen, jedoch nicht ohne viel Aufwand. Eine einfachere Variante nutzt den Satz von Seifert-van Kampen (Satz 4.5), welcher aber erst in Kapitel 4 bewiesen wird. Wir müssen uns mit dem Beweis des Satzes also leider noch bis zum Abschnitt 4.3 gedulden.

3.5. Die Fundamentalgruppe des Kreises

Mit der anderen Klasse Mannigfaltigkeiten, die wir bereits definiert haben, können wir nun aber leicht umgehen:

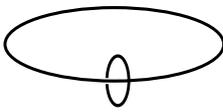
Satz 3.26: Die Fundamentalgruppe des Torus \mathbb{T}^n , $n \geq 2$, ist nicht trivial,

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n.$$

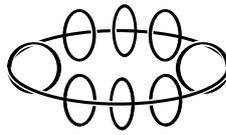
Insbesondere sind also $S^n \not\cong \mathbb{T}^n$ für $n \geq 2$.

BEWEIS: Der Torus \mathbb{T}^n kann geschrieben werden als $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1 = (S^1)^n$. Nach Satz 3.22 und Satz 3.24 folgt bereits, dass

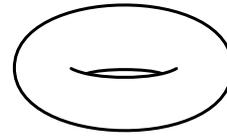
$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \left(\pi_1(S^1)\right)^n = \mathbb{Z}^n. \quad \blacksquare$$



(a) Der Torus $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ als exemplarische Darstellung der beiden S^1 .



(b) Eine Darstellung mit mehreren Vertretern der S^1 .



(c) Die schließlich entstehende Fläche.

Abbildung 3.9: Die Bausteine des Torus, aus denen sich die Fundamentalgruppe zusammensetzt.

3.5 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Lemma 3.27: Sei $\text{ex} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$, wobei S^1 mit dem Einheitskreis in \mathbb{C} identifiziert wird. Für jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $f(e^{2\pi it}) = f(1) \cdot e^{2\pi i\varphi(t)}$, also $f \circ \text{ex} = f(1) \cdot (\text{ex} \circ \varphi)$.

BEWEIS: Benutze den Hauptzweig des komplexen Logarithmus,

$$\log : \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \text{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \log(re^{i\alpha}) = \ln(r) + i\alpha$$

wo $\alpha \in (-\pi, \pi)$, also $\exp \circ \log = \text{id}$. Weiter benutze die Periodizität der Exponentialabbildung: $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$, sowie $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Eindeutigkeit: Ist $f(1) \cdot \text{ex} \circ \varphi = f(1) \cdot \text{ex} \circ \psi$, so ist $\exp(2\pi i(\varphi(t) - \psi(t))) = 1$, und folglich $\varphi(t) - \psi(t) \in \mathbb{Z}$ für alle $t \in [0, 1]$. Wegen $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ und der Stetigkeit von $\varphi - \psi$ folgt, dass $\varphi - \psi = 0$ für alle $t \in [0, 1]$, also $\varphi = \psi$.

Die Existenz folgt aus dem folgenden Argument: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $f(1) = 1$ (denn sonst gehe zu $g(z) = f(1)^{-1} \cdot f(z)$ über). Da f gleichmäßig stetig ist, existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ von $[0, 1]$, so dass für $h := f \circ \text{ex} : [0, 1] \rightarrow S^1$ gilt:

$$|h(t) - h(t_j)| < 2 \text{ für } t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, k-1.$$

Kapitel 3. Die Fundamentalgruppe

Daraus folgt, dass $h(t)/h(t_j) \neq -1$ ist, denn $h(t)$ und $h(t_j)$ sind keine Antipoden. Nun folgt, dass $\log(h(t)/h(t_j))$ (der Hauptzweig des Logarithmus) definiert ist, und gleichzeitig den orientierten Winkel zwischen $h(t_j)$ und $h(t)$ in $(-\pi, \pi)$ wieder gibt. Man setzt nun

$$\varphi(t) := \frac{1}{2\pi i} \left(\log \frac{h(t_1)}{h(t_0)} + \dots + \log \frac{h(t)}{h(t_j)} \right)$$

wenn $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ist. Somit ist φ stetig, $\varphi(0) = 0$ und da $h(t_0) = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{ex} \circ \varphi(t) &= \exp \left(\log \frac{h(t_1)}{h(t_0)} + \dots + \log \frac{h(t)}{h(t_j)} \right) \\ &= \frac{h(t_1)}{h(t_0)} \cdot \dots \cdot \frac{h(t)}{h(t_j)} \\ &= h(t) = f \circ \text{ex}(t) \end{aligned}$$

■

Die eben gezeigte Abbildung ist eine sogenannte *Liftung*, wie sie in Abschnitt 6.3 noch genauer besprochen wird.

Diese Funktion können wir nun benutzen, um eine weitere topologische Invariante zu definieren:

Definition 3.28: Ist $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig und $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und $f \circ \text{ex} = f(1) \cdot \text{ex} \circ \varphi$, so nennen wir

$$\text{deg}(f) := \varphi(1)$$

den *Abbildungsgrad* von f .

Der Abbildungsgrad einer Funktion f gibt die „Windungszahl“ von f um den Nullpunkt an (siehe auch Abb. 3.10, und es ist $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$, denn $\text{ex}(\varphi(1)) = f(1)^{-1} \cdot f \circ \text{ex}(1) = f(1)^{-1} \cdot f(1) = 1$).

Von einigen einfachen Funktionen ist der Abbildungsgrad leicht zu bestimmen. Für die konstante Funktion $f(z) = c$ ist beispielsweise $f \circ \text{ex} = f(1) \text{ex} \circ \varphi$, also $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$, und somit ist $\text{deg}(f) = 0$. Die Identität hingegen hat $\text{deg}(\text{id}) = 1$, denn es ist $\text{id} \circ \text{ex} = \text{id}(1) \text{ex} \circ \text{id}_{[0,1]}$, also $\varphi(1) = \text{id}_{[0,1]}(1) = 1$. Genau genommen interessieren uns die genauen Werte aber gar nicht so sehr, sondern viel mehr, ob wir den Abbildungsgrad auf eine sinnvolle Weise auch auf ganzen Homotopieklassen von Abbildungen benutzen können.

Lemma 3.29: Sind $f_0, f_1 : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1)$ homotop, so ist $\text{deg}(f_0) = \text{deg}(f_1)$.

BEWEIS: Sei dazu $(f_s)_{s \in [0,1]}$ eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 . Folglich ist auch $(h_s)_{s \in [0,1]} := (f_s \circ \text{ex})_{s \in [0,1]}$ eine Homotopie zwischen $h_0 := f_0 \circ \text{ex}$ und $h_1 = f_1 \circ \text{ex}$. Wie in Lemma 3.27 heben wir jetzt alle h_s gleichzeitig zu φ_s , so dass $h_s = \text{ex} \circ \varphi_s$ ist. Damit ist $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : (t, s) \mapsto \varphi_s(t)$ stetig, denn weil $(t, s) \mapsto h_s(t)$

3.5. Die Fundamentalgruppe des Kreises

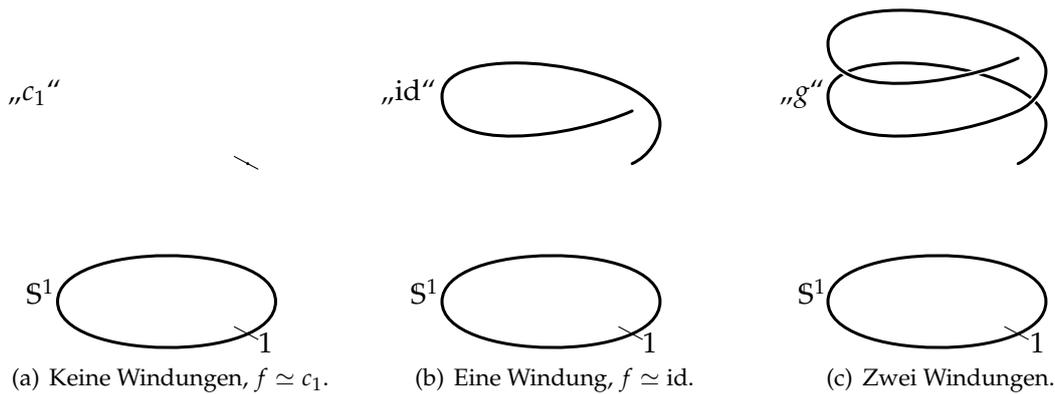


Abbildung 3.10: Schematische Darstellung der Windungszahl: Bewegt sich f gar nicht um den Nullpunkt, so hat es die Windungszahl 0; bewegt sich f nur einmal um den Nullpunkt, wie in (b) dargestellt, so ist die Windungszahl 1; bewegt es sich zweimal um den Nullpunkt, wie in (c) dargestellt, so ist die Windungszahl 2.

gleichmäßig stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$ ist und weil $[0, 1] \times [0, 1]$ kompakt ist existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$, so dass für alle $s \in [0, 1]$ gilt:

$$|h_s(t) - h_s(t_j)| < 2 \text{ für } t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Deshalb ist

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\log \frac{h_s(t_1)}{h_s(t_0)} + \dots + \log \frac{h_s(t)}{h_s(t_j)} \right) \text{ für } t \in [t_j, t_{j+1}]$$

und somit insbesondere stetig. Weiterhin ist $\varphi_s(0) = 0$ und

$$s \mapsto \deg(f_s) = \varphi_s(1) \in \mathbb{Z}$$

ebenfalls stetig und deshalb konstant. Daher ist, wie zu zeigen war,

$$\deg(f_0) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \deg(f_1). \quad \blacksquare$$

Wir können sogar noch eine stärkere Eigenschaft nachweisen.

Satz 3.30: Für $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ stetig gilt

$$f_0 \simeq f_1 \text{ relativ } \{0, 1\} \Leftrightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$$

BEWEIS: Da die Richtung $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$ schon in Lemma 3.29 gezeigt wurde, reicht es nun aus, die Umkehrung zu beweisen.

Sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f_0(1) = f_1(1)$, denn sonst verkürze oder verlängere $f_1(1)$ entlang der Homotopie auf $f_0(1)$. Es sei $\deg(f_0) = \deg(f_1)$

Kapitel 3. Die Fundamentalgruppe

und $\varphi_0, \varphi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$ und $f_i \circ \text{ex} = \text{ex} \circ \varphi_i$ ist für $i = 1, 2$. Wegen $\varphi_0(1) = \deg(f_0) = \deg(f_1) = \varphi_1(1)$ ist auch für

$$\varphi_s(t) = (1-s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$$

stets $\varphi_s(1) = \varphi_s(0) \in \mathbb{Z}$ für alle $s \in [0, 1]$. Folglich existiert ein stetiges $\Phi : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(\text{ex}(t), s) = \varphi_s(t).$$

Die Zusammenhänge sind im folgenden Diagramm verdeutlicht:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{(t,s) \mapsto \varphi_s(t)} & \mathbb{R} \\ \text{ex} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{ex} \\ \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Damit ist aber $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $H := \text{ex} \circ \Phi$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 , denn es ist

$$H(\text{ex}(t), s) = \text{ex} \circ \varphi_s(t) = f_s \circ \text{ex}(t) \text{ für } s = 0, 1$$

und damit also $h_0 = f_0$ und $h_1 = f_1$. ■

Damit können wir schließlich die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1 genau bestimmen:

BEWEIS (VON SATZ 3.24): Die Abbildung $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}, [\alpha] \rightarrow \deg(\alpha)$ ist wohldefiniert und homomorph, denn ist $\alpha \circ \text{ex} = \text{ex} \circ \varphi$ und $\beta \circ \text{ex} = \text{ex} \circ \psi$, so ist $(\alpha * \beta) \circ \text{ex} = \text{ex} \circ \chi$ mit

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(1) + \psi(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Damit ist $\varphi([\alpha][\beta]) = \chi(1) = \varphi(1) + \psi(1) = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta])$.

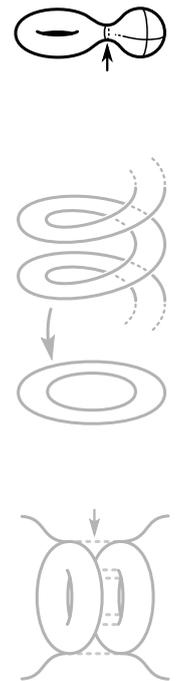
Ist $\deg(\alpha) = 0$, so zeigt Satz 3.30, dass $\alpha \simeq c_1$ nicht nur als stetige Abbildungen, sondern auch als Pfade (d.h. relativ $\{0, 1\}$), also $[\alpha] = 1$, und somit ist φ injektiv.

Da für $\alpha(t) = \text{ex}(nt)$ gilt $\varphi([\alpha]) = n$, ist φ auch surjektiv, und damit insgesamt ein Isomorphismus. ■

Insgesamt haben wir damit die Fundamentalgruppe des Kreises durch Überlagerungen und Liftungen von Kurven auf \mathbb{S}^1 (siehe Kapitel 6) nachgewiesen. Es ist sehr wichtig diese Fundamentalgruppe zu kennen, da viele nachfolgende Ergebnisse darauf beruhen, wie dies auch schon in Satz 3.26 geschehen ist.

4 Zusammenhängende Summen von Mannigfaltigkeiten

Im vorangegangenen Kapitel haben wir bereits eine Möglichkeit kennen gelernt, die Fundamentalgruppe einer konstruierten Mannigfaltigkeit zu bestimmen aus den Fundamentalgruppen der Bauteile: Erzeugen wir das Cartesische Produkt zweier Mannigfaltigkeiten ergibt sich eine neue Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe das cartesische Produkt der beiden Ausgangsgruppen ist. Damit lassen sich bereits zahlreiche Mannigfaltigkeiten und deren Fundamentalgruppen beschreiben, so zum Beispiel jeder n -dimensionale Torus und jedes beliebige Produkt aus Tori, Sphären und Kreisen. In diesem Kapitel werden wir eine weitere Möglichkeit erarbeiten, Mannigfaltigkeiten herzustellen, nämlich die *zusammenhängende Summe* von Mannigfaltigkeiten. Dabei werden zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension über einen Zylinder „verklebt“ und somit zu einer einzelnen Mannigfaltigkeit gleicher Dimension vereinigt. Dies wird es uns erlauben, im nachfolgenden Kapitel die Flächen komplett zu bestimmen. Mit diesem Schritt definieren wir die erste von drei Techniken, die wir in einer abschließenden Betrachtung über das Geometrisierungsprogramm von Thurston (siehe Kapitel 9) benutzen werden, um die *Gesamtheit* aller 3-Mannigfaltigkeiten zu erfassen.



4.1 Summen von Mannigfaltigkeiten

Wir können gleich zu Beginn elementar definieren, was die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten sein soll.

Definition 4.1: Seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension n . Dann benennt $M \# N$, die *zusammenhängende Summe von M und N* diejenige Mannigfaltigkeit, die entsteht, wenn aus M und N jeweils ein n -dimensionaler Ball herausgeschnitten und die entstehenden Randpunkte miteinander identifiziert werden. D.h. Seien $B_i \subseteq M_i$ mit $\psi_i : \mathbb{B}^n \rightarrow B_i$ diffeomorph. Die Punkte $p_1 \in \partial B_1$ und $p_2 \in \partial B_2$ seien äquivalent, $p_1 \sim p_2$, wenn $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(p_1) = p_2$ ist. Dann definiere:

$$M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2 = ((M_1 \setminus \mathring{B}_1) + (M_2 \setminus \mathring{B}_2)) / \sim$$

wobei „+“ die topologische Summe der Räume sein soll.

Anschaulich gesagt schneiden wir also eine Kugel, oder zumindest ein kugel-diffeomorphes Gebilde aus unseren Mannigfaltigkeiten heraus und verkleben die entstehenden Reste an den Randpunkten. Nun ist zu zeigen, dass das entstehende Objekt auch

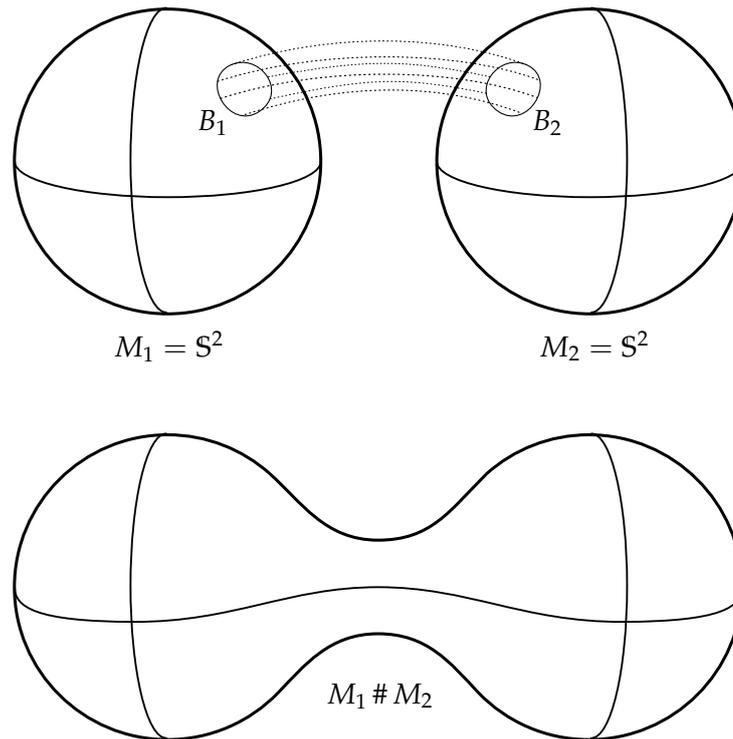


Abbildung 4.1: Darstellung der zusammenhängenden Summe zweier Sphären. Es entsteht eine Art „Hantel“, die auch wieder einfach zusammenhängend ist.

wirklich eine Mannigfaltigkeit ist und dass die Summe nicht von der Wahl der Diffeomorphismen abhängt.

Lemma 4.2: *Die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten ist selbst wieder eine Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Sei dazu $M = M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2$, und die Summe entstehe durch Herausschneiden von $B_1 \subseteq M_1$ und $B_2 \subseteq M_2$, wobei $\psi_i : B_i \rightarrow \mathbb{B}^n$ diffeomorph seien. Die kanonischen Inklusionen seien benannt mit $j_i : M_i \setminus \mathring{B}_i \rightarrow M$ und es sei $S_i := \partial B_i$ sowie $S = \psi_1(\partial \mathbb{B}^n) = \psi_2(\partial \mathbb{B}^n)$.

Die Menge M bringt bereits auf natürliche Weise eine topologische Struktur mit, da die Konstruktion mittels der Summe und des Quotienten eine solche Struktur erhält. Man kann zeigen, dass die Topologie von M abzählbar ist und M Hausdorffsch ist, was an dieser Stelle aber nicht durchgeführt werden soll. Außerdem ist M wegzusammenhängend: seien p_1 und p_2 Punkte, deren Urbilder in M_1 und M_2 liegen. Da M_1 und M_2 wegzusammenhängend waren, gibt es Wege γ_1 und γ_2 in $j_i(M_i \setminus \mathring{B}_i)$, die p_i mit $p \in S$ verbinden. Damit ist $\gamma_1 * \gamma_2$ ein Weg, der p_1 und p_2 verbindet. Und schließlich ist M kompakt; auch diese Eigenschaft wird direkt durch die Konstruktion hergestellt, da M_1 und M_2 kompakt waren.

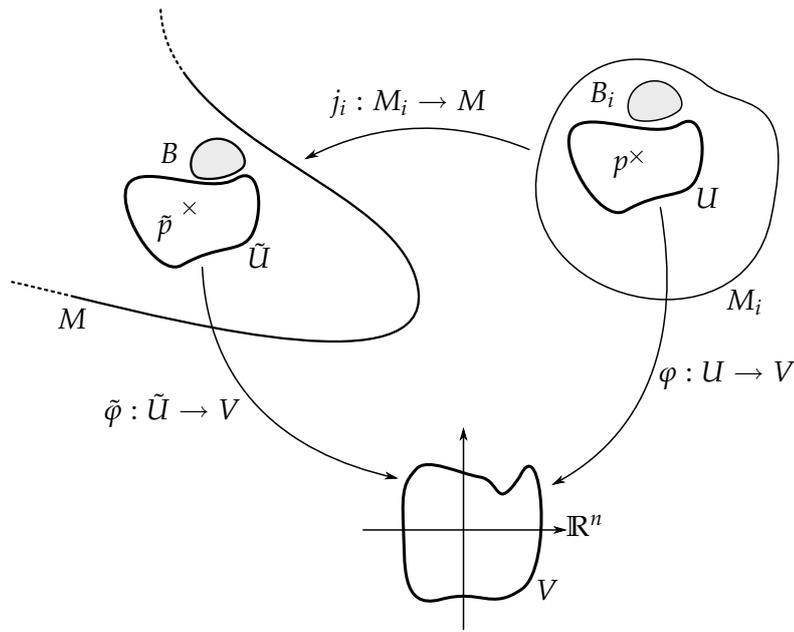


Abbildung 4.2: Karten in den Bereichen von M , die komplett aus M_1 oder M_2 stammen, können direkt aus den Karten von M_1 bzw. M_2 übernommen werden.

Es ist offensichtlich, dass für jeden Punkt $\tilde{p} \in M_i \setminus B_i$ eine Karte existiert, die den Rand S_i nicht schneidet (für $i = 1, 2$). Da j_1 und j_2 sogar Homöomorphismen sind, sind diese Karten in M_i somit auch Karten in M (siehe auch Abb. 4.2).

Wir benötigen also noch Karten um Punkte $p \in S$, also solche Punkte, dass $q_i \in M_i$ mit $j_i(q_i) = p$ und $q_i \in S_i$ existieren.

Seien dafür $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um q_1 und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um q_2 , also U_i Umgebungen von q_i ; und diese Karten seien so, dass $V_1 = V_2 = \mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und dass $\varphi_1(U_1 \setminus B_1) = \mathbb{B}_+^n$, $\varphi_2(U_2 \setminus B_2) = \mathbb{B}_-^n$ und schließlich noch $j_1 \circ \varphi_1 \circ \psi_1(\xi) = j_2 \circ \varphi_2 \circ \psi_2(\xi)$ ist für alle $\xi \in S^{n-1} \cap \psi_1^{-1}(U_1) \cap \psi_2^{-1}(U_2)$.

Man kann sich davon überzeugen, dass solche Karten existieren, da an jeder Stelle Diffeomorphismen zwischengeschaltet werden können, um die benötigten Eigenschaften zu erreichen. Wir benötigen noch eine weitere Eigenschaft, nämlich dass $j_1(U_1 \cap S_1) = j_2(U_2 \cap S_2)$ und $j_1 \circ \varphi_1|_{U_1 \cap S_1} = j_2 \circ \varphi_2|_{U_2 \cap S_2}$ ist, und auch dies kann durch Zwischenschalten von Diffeomorphismen erreicht werden. Man setzt dann

$$U := j_1(U_1 \setminus B_1) \cup j_1(U_1 \cap S_1) \cup j_2(U_2 \setminus B_2)$$

und

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1 \circ j_1^{-1}(x) & x \in j_1(U_1 \setminus B_1) \\ \varphi_1 \circ j_1^{-1}(x) = \varphi_2 \circ j_2^{-1}(x) & x \in j_1(U_1 \cap S_1) = j_2(U_2 \cap S_2) \\ \varphi_2 \circ j_2^{-1}(x) & x \in j_2(U_2 \setminus B_2) \end{cases} .$$

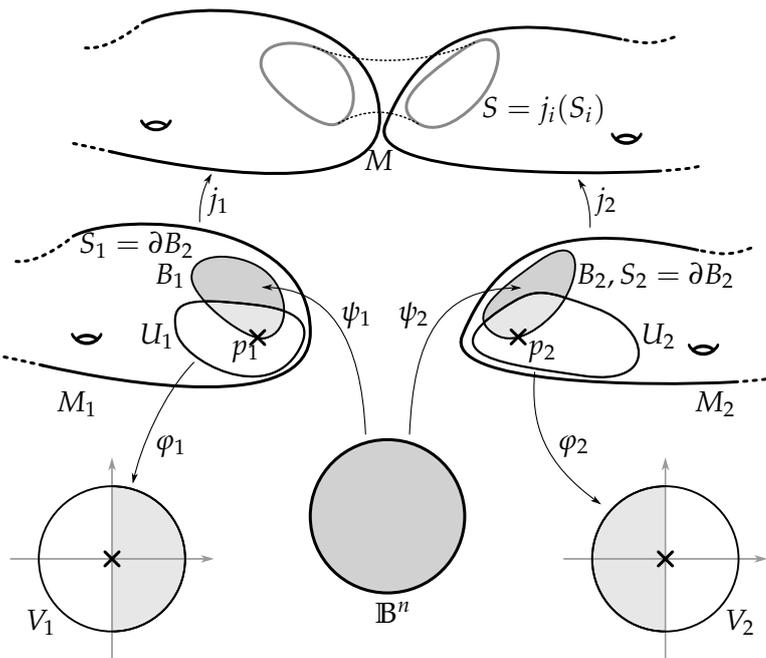


Abbildung 4.3: Aus zwei passenden Karten $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ wird eine Karte in M zusammengesetzt. Da alle Schnittmengen übereinstimmend gemacht werden können ist es möglich, die weißen Bereiche in V_1 und V_2 zu einer Karte zusammen zu setzen.

Dies ist eine Karte um $\varphi(0) = p$ auf M , die alle notwendigen Eigenschaften erfüllt (siehe auch Abbildung 4.3).

Damit ist M bereits eine *glatte* Mannigfaltigkeit. Es fehlt nun nur noch, dass M auch orientierbar ist. Der Beweis hierfür kann wie folgt skizziert werden: Die Tangentialräume TM_1 von M_1 und TM_2 von M_2 erfahren im Wesentlichen die gleichen Operationen wie M_1 und M_2 , es ist dann

$$TM = (TM_1 \setminus TB_1) + (TM_2 \setminus TB_2) / \sim$$

wobei $v_1 \sim v_2$ genau dann der Fall sein soll, wenn $v_i \in TB_i$ sind. Dabei wird jeweils eine Komponente von TM_1 mit einer Komponenten von TM_2 verbunden, so dass auch TM in zwei Komponenten zerfällt, und somit M orientierbar ist¹.

Damit ist M schließlich eine glatte, orientierbare, kompakte Mannigfaltigkeit. ■

Nun wissen wir, dass wir tatsächlich eine neue Mannigfaltigkeit erzeugt haben, und folgendes Lemma erlaubt uns, die reichlich ungenaue Notation „ $M = N_1 \# N_2$ “ zu schreiben.

¹Tatsächlich können sogar zwei *orientierte* Mannigfaltigkeiten durch die zusammenhängende Summe so verbunden werden, dass das Ergebnis wieder eine Orientierung trägt, die auf den Komponenten mit der Orientierung der Ausgangsmannigfaltigkeiten übereinstimmt. Auch dies wird hier nicht bewiesen.

4.1. Summen von Mannigfaltigkeiten

Lemma 4.3: Seien N_1 und N_2 zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten und $B_i, B'_i \subseteq N_i$ mit $\psi_i : \mathbb{B}^n \rightarrow B_i$ und $\psi'_i : \mathbb{B}^n \rightarrow B'_i$ Diffeomorphismen. Dann ist

$$N_1 \#_{\psi_1, \psi_2} N_2 \cong N_1 \#_{\psi'_1, \psi'_2} N_2.$$

BEWEIS: Wie oben seien $p_1 \in \partial B_1$ und $p_2 \in \partial B_2$ seien äquivalent, $p_1 \sim p_2$, falls $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(p_1) = p_2$ ist, und ebenso seien $q_i \in \partial B'_i$ äquivalent, $q_1 \sim' q_2$, falls $\psi'_2 \circ \psi'_1^{-1}(q_1) = q_2$ ist. Dann definiere:

$$M_1 = (N_1 \setminus \mathring{B}_1) + (N_2 \setminus \mathring{B}_2) / \sim$$

$$M_2 = (N_1 \setminus \mathring{B}'_1) + (N_2 \setminus \mathring{B}'_2) / \sim'$$

Wir haben also zwei Mannigfaltigkeiten, die beide die Definition der zusammenhängenden Summe erfüllen, aber mit unabhängig gewählten Verbindungskugeln (siehe Abb. 4.4). Zu zeigen ist nun, dass $M_1 \cong M_2$ ist.

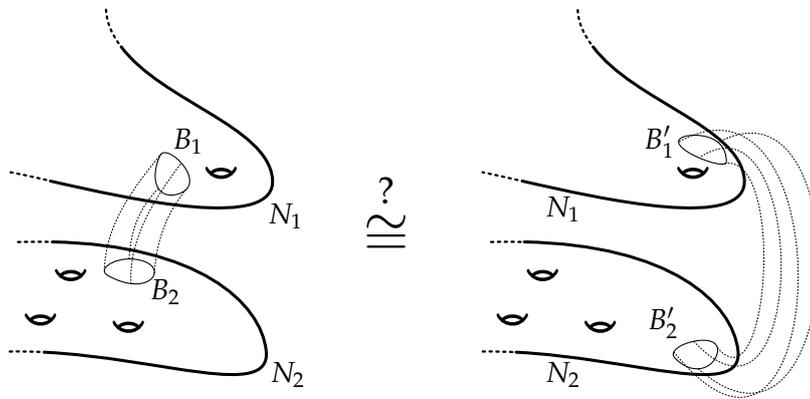


Abbildung 4.4: Ist die Summe unabhängig von der Wahl von B_1 und B_2 ? Das heißt, sind für verschiedene Wahlen B_1, B_2 und B'_1, B'_2 die resultierenden Mannigfaltigkeiten diffeomorph?

An dieser Stelle müssen wir auf etwas zurückgreifen, was in dieser Arbeit nicht bewiesen werden kann, nämlich dass es im Wesentlichen nur eine Art gibt, abgeschlossene Kugeln in eine Mannigfaltigkeit einzubetten. Das heißt, für zwei Einbettungen $\psi_i : \mathbb{B}^n \rightarrow N$ existiert ein Diffeomorphismus $\Phi : N \rightarrow N$, so dass $\Phi \circ \psi_1 = \psi_2$ ist. Dieses Ergebnis erhält man beispielsweise aus Betrachtungen von Isotopien und deren Erweiterungen zu Diffeotopien und Diffeomorphismen, siehe z.B. [4, Chapter 8.3].

Damit ergibt sich der Rest des Beweises recht einfach: Sei $\Phi : N_1 \rightarrow N_1$ ein Diffeomorphismus, der B_1 auf B'_1 verschiebt und $\Psi : N_2 \rightarrow N_2$ ein Diffeomorphismus, der B_2 auf B'_2 abbildet. Mit dem im Beweis zu Lemma 4.2 beschriebenen Techniken lassen sich Φ und Ψ zu einem Diffeomorphismus $M_1 \rightarrow M_2$ kombinieren. ■

Damit haben wir die zusammenhängende Summe zu einem guten Werkzeug gemacht, mit dem wir neue Mannigfaltigkeiten bauen können.

Korollar 4.4: Die Verknüpfung „#“ ist kommutativ und assoziativ (bezüglich Diffeomorphismen), d.h. $M_1 \# M_2 \cong M_2 \# M_1$ und $M_1 \# (M_2 \# M_3) \cong (M_1 \# M_2) \# M_3$.

BEWEIS: Aus der Definition ist sofort klar, dass $M_1 \# M_2 = M_2 \# M_1$ ist.

Mittels des oben zitierten Ergebnisses, dass zwei Kugel-Einbettungen stets durch einen Diffeomorphismus ineinander überführt werden können, kann auch die Assoziativität nachgewiesen werden, was jedoch nicht trivial ist und hier nicht ausgeführt wird. ■

4.2 Die Fundamentalgruppen von Summen

Nun, da wir wissen, wie man aus zwei Mannigfaltigkeiten eine weitere zusammensetzen kann, ist es notwendig, auch deren Fundamentalgruppen zu verstehen.

Im Wesentlichen liefert uns der folgende Satz die komplette Information über die Fundamentalgruppen von Summen:

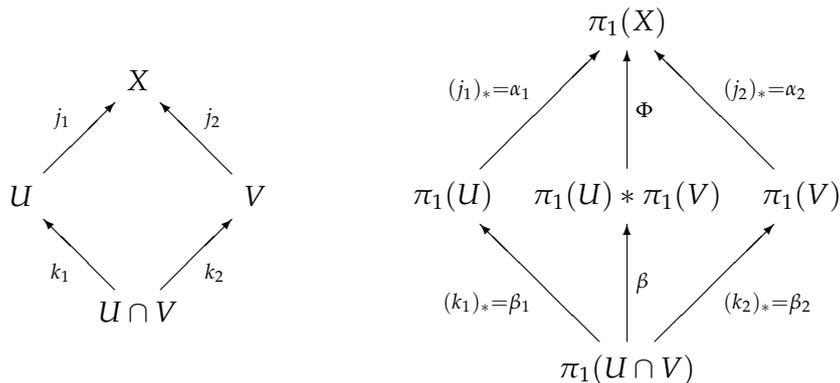
Satz 4.5 (von Seifert-van Kampen): Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ offen, U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend, $p \in U \cap V$ Fußpunkt für Pfade und $X = U \cup V$. Es seien $j_1 : U \rightarrow X$ und $j_2 : V \rightarrow X$ die kanonischen Inklusionen. Bezeichne dann mit $\alpha_1 = (j_1)_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ und $\alpha_2 = (j_2)_* : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$ die (nicht notwendigerweise injektiven) Inklusionen der Fundamentalgruppen. Man setzt

$$\alpha_1 * \alpha_2 = \Phi : \pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$$

den von den Inklusionen induzierte Homomorphismus (wie in Definition 2.26). Weiter setzt man $k_1 : U \cap V \rightarrow U$ und $k_2 : U \cap V \rightarrow V$ die kanonischen Inklusionen und analog zum Oberen $\beta_1 = (k_1)_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$ und $\beta_2 = (k_2)_* : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$, sowie

$$\beta : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U) * \pi_1(V) : \beta([\gamma]) = \beta_1([\gamma])(\beta_2([\gamma]))^{-1}.$$

Wir haben also folgende Diagramme:



Damit definiert man

$$N := \langle \text{im } \beta \rangle$$

4.2. Die Fundamentalgruppen von Summen

den von Pfaden der Art $\beta_1([\gamma])(\beta_2([\gamma]))^{-1}$ erzeugte Normalteiler in $\pi_1(U) * \pi_1(V)$, es ist also $N \trianglelefteq \pi_1(U) * \pi_1(V)$.

Dann sei

$$\hat{\Phi} : \pi_1(U) * \pi_1(V) / N \rightarrow \pi_1(X)$$

der induzierte Homomorphismus. Die Aussage des Satzes von Seifert-van Kampen ist schließlich: $\hat{\Phi}$ ist ein Isomorphismus, also insbesondere

$$\pi_1(U \cup V) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) / N.$$

BEWEIS: Zur Vereinfachung benennen wir in diesem Beweis $G_1 := \pi_1(U)$, $G_2 := \pi_1(V)$ und $G = \pi_1(X)$, sowie die Notation $\hat{c} := cN \in G_1 * G_2 / N$ für ein $c \in G_1 * G_2$, also $\hat{\cdot} : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 * G_2 / N$ die kanonische Projektion.

Wir zeigen zuerst, dass $\alpha \circ \beta = 1$ ist, denn dann ist N ein Normalteiler. Betrachte

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta([\gamma]_{U \cap V}) &= \alpha([\gamma]_U [\gamma]_V^{-1}) \\ &= [\gamma]_X [\gamma]_X^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass $\text{im } \beta \subseteq \ker \alpha$ und somit $\langle \text{im } \beta \rangle \subseteq \ker \alpha$ ist, also auch

$$N = \langle \text{im } \beta \rangle \subseteq \ker \hat{\Phi}$$

ein Normalteiler und es bleibt noch zu zeigen, dass $N \stackrel{!}{=} \ker \hat{\Phi}$ gilt.

Insbesondere ist nun aber für einen Weg γ in $U \cap V$: $[\hat{\gamma}]_U = [\hat{\gamma}]_V$, denn es ist $[\gamma]_U [\gamma]_V^{-1} \in N$.

Wir beweisen jetzt, dass $\hat{\Phi}$ **surjektiv** ist. Sei dazu γ ein geschlossener Weg in X , ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit Aufpunkt $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ so dass $p \in U \cap V$. Die offenen Mengen $\gamma^{-1}(U)$ und $\gamma^{-1}(V)$ überdecken $[0, 1]$, und $[0, 1]$ ist kompakt, also existiert ein $k \geq 0$ und $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$, so dass die Teilstücke abwechselnd in U und V liegen, also $(\gamma([t_{r-1}, t_r]) \subseteq U$ und $\gamma([t_r, t_{r+1}]) \subseteq V$) oder umgekehrt ($\gamma([t_{r-1}, t_r]) \subseteq V$ und $\gamma([t_r, t_{r+1}]) \subseteq U$) für $r = 1, \dots, k-1$ (siehe Abb. 4.5). Setze dann $x_r = \gamma(t_r) \in U \cap V$ und damit $\gamma_r : [0, 1] \rightarrow U$ oder V , mit $\gamma_r(\tau) = \gamma((1-\tau)t_{r-1} + \tau t_r)$ für $r = 1, \dots, k$. Dann ist $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_k$, und nun wähle für $r = 1, \dots, k-1$ Hilfswege ζ_r von p nach x_r , die komplett in $U \cap V$ liegen, und $\zeta_0 = \zeta_k = c_p$. Setzt man nun

$$\eta_r := \zeta_{r-1} * \gamma_r * \zeta_r^{-1},$$

so ist η_r ein geschlossener Weg in U oder V , und es ist

$$[\gamma] = [\eta_1][\eta_2] \dots [\eta_k].$$

Da aber entweder $[\eta_r] = \alpha_1([\eta_r]_U)$ ist, wenn η_r ein Weg in U ist, oder $[\eta_r] = \alpha_2([\eta_r]_V)$, wenn η_r ein Weg in V ist, und diese beiden Fälle immer abwechselnd auftreten, erhält man

$$[\gamma] = \Phi([\eta_1]_{\gamma_1} \dots [\eta_{k+1}]_{\gamma_k})$$

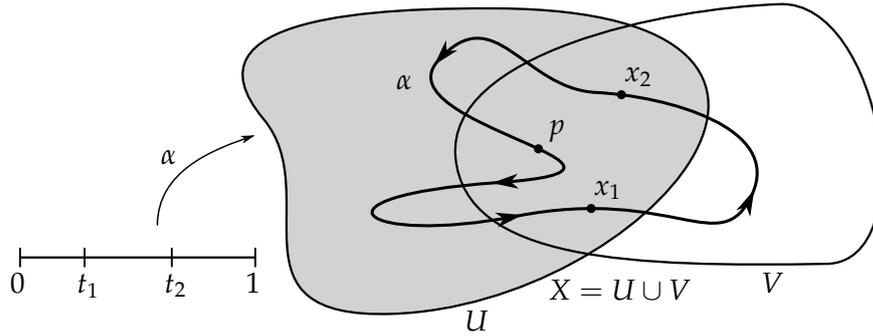


Abbildung 4.5: Der Pfad α in $X = U \cup V$ wird so zerlegt, dass jedes Teilstück komplett in U oder in V liegt.

mit $Y_r = U$, wenn η_r ein Weg in U ist und $Y_r = V$, wenn η_r ein Weg in V ist. Also existiert ein Urbild von $[\alpha]$, und somit ist Φ surjektiv, also auch $\hat{\Phi}$.

Die **Injektivität** von $\hat{\Phi}$ zeigt man wie folgt: Sei nun $c = [\gamma_1] \dots [\gamma_k] \in G_1 * G_2$ mit $\Phi(c) = 1$ in G und γ_r Weg in U oder V für jedes $r = 1, \dots, k$. Zu zeigen ist, dass $\hat{c} = 1$. Es existiert eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_k$ auf c_p , da $\Phi(c) = 1$ ist. Wir zerlegen $[\frac{r}{k}, \frac{r+1}{k}] \times [0, 1]$ in ein so feines Gitter, dass für jedes Rechteck Q gilt, dass $H(Q) \subseteq U$ oder $H(Q) \subseteq V$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $Q = [\frac{r}{k}, \frac{r+1}{k}] \times [\frac{s}{l}, \frac{s+1}{l}]$ eine Zerlegung in Rechtecke (siehe Abbildung 4.6).

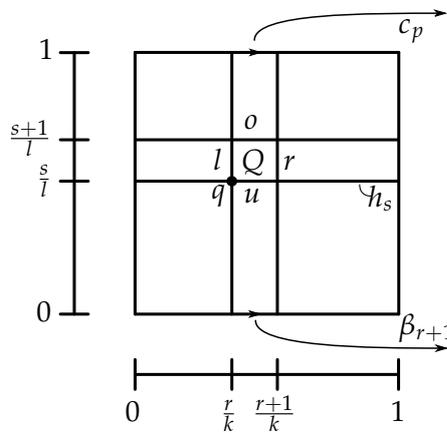


Abbildung 4.6: Die Benennung der Variablen für die rechteckige Zerlegung des Einheitsquadrates $[0, 1] \times [0, 1]$.

Wähle für jedes $q \in [0, 1]^2$ des Gitters $\Gamma = \frac{1}{k}\mathbb{Z} \times \frac{1}{l}\mathbb{Z}$ einen Hilfsweg ζ_q von p nach $H(q)$ in $U \cap V$ und betrachte für jede Kante v , die q_1 mit einem benachbarten q_2 verbindet, den geschlossenen Weg

$$\bar{v} := \zeta_{q_1} * (H \circ v) * \zeta_{q_2}^{-1}$$

4.2. Die Fundamentalgruppen von Summen

in $U \cap V$. In $[0, 1]^2$ gilt für jedes Rechteck Q mit den Kanten u, r, o, l , dass $u * r \simeq l * o$ relativ $\{0, 1\}$ ist, und folglich in $U \cap V$ auch $\bar{u} * \bar{r} \simeq \bar{l} * \bar{o}$, und damit auch

$$\widehat{[\bar{u}]} * \widehat{[\bar{r}]} = \widehat{[\bar{l}]} \widehat{[\bar{o}]}$$

Sind nun $h_s, h_{s+1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ benachbarte Horizontalen in Γ , so ist

$$h_{s+1} = o_1 * \dots * o_k \simeq (l_1^{-1} * u_1 * r_1) * \dots * (l_k^{-1} * u_k * r_k).$$

Weil weiter $\bar{l}_1^{-1} = c_p = \bar{r}_k$ ist und $r_j = l_{j+1}^{-1}$, folgt

$$\widehat{[h_{s+1}]} = \widehat{[u_1]} \dots \widehat{[u_k]} = \widehat{[h_s]} \quad \text{also} \quad \widehat{[h_s]} = \widehat{[h_{s+1}]}.$$

Durch mehrfache Anwendung dieses Resultates erhalten wir

$$\widehat{[\gamma_i]} = \widehat{[h_0]} = \widehat{[h_l]} = \widehat{[c_p]}.$$

Und damit ergibt sich schließlich, dass

$$\hat{c} = \widehat{[\gamma_1]} \dots \widehat{[\gamma_k]} = \widehat{[c_p]} \dots \widehat{[c_p]} = 1. \quad \blacksquare$$

Bevor wir den Satz von Seifert-van-Kampen auf unsere Konstruktion der zusammenhängenden Summe anwenden können, benötigen wir eine leichte, technische Modifikation: für zusammenhängende Summen waren weder $U = M_1$, noch $V = M_2$ offen. Definiert man aber U und V so, dass sie ein wenig über die Schnittstelle hinausragen und offen sind (siehe Abb. 4.7), so erhält man, dass $\pi_1(U) = \pi_1(M_1)$, $\pi_1(V) = \pi_1(M_2)$ und $\pi_1(U \cap V) = \pi_1(S^{n-1})$, wo n die Dimension von M ist.

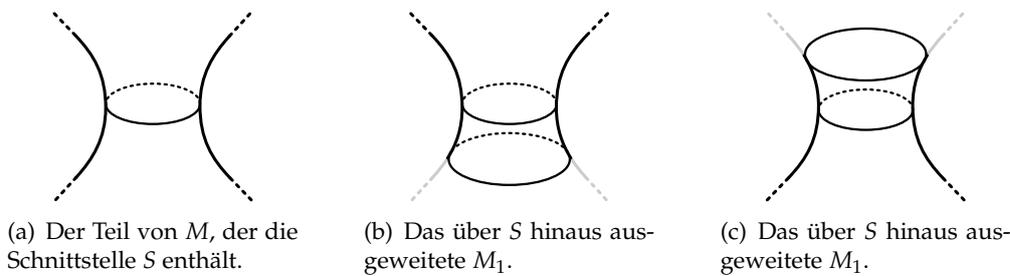


Abbildung 4.7: Um den Satz von Seifert-van Kampen auf zusammenhängende Summen von Mannigfaltigkeiten anwenden zu können, müssen U und V so definiert werden, dass sie ein kleines Stück über die Schnittstelle S von M_1 und M_2 in M hinausragen und offen sind.

Insbesondere wird also die Fundamentalgruppe einfach zu berechnen sein, wenn die Überschneidung $U \cap V$ einfach zusammenhängend ist. Da in unserem Fall aber stets

Kapitel 4. Zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten

$\pi_1(U \cap V) = \pi_1(S^{n-1})$ ist, tritt dieser Fall genau dann ein, wenn $n \geq 3$ ist. Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 erzeugen bei der Verknüpfung einen „Kreis“, also eine S^1 als Überschneidung, welcher nicht einfach zusammenhängend ist.

Korollar 4.6: Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 darstellbar als $M = M_1 \# M_2$. Dann ist

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1 \setminus \{\text{pt}\}) * \pi_1(M_2 \setminus \{\text{pt}\}) / \pi_1(S).$$

Dabei ist bei der Quotientenbildung die Einbettung von $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(S)$ als Fundamentalgruppe des Schnittes zu beachten.

Sei hingegen M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ darstellbar als $M = M_1 \# M_2$, so ist

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2).$$

Dieses folgt aus der Beobachtung, dass $M_i \setminus \{\text{pt}\}$ homotopieäquivalent zu M_i ist wenn $n \geq 3$ ist und dass in diesem Fall $\pi_1(S^n) = (1)$ gilt.

Damit haben wir alle notwendigen Voraussetzungen gesammelt, um Summen und deren Fundamentalgruppe nützlich anwenden zu können.

4.3 Eine Anwendung: Sphären

Wir können nun unser Wissen anwenden, um den Beweis des aus Abschnitt 3.4 offenen Satz 3.25 antreten zu können. Dafür finden wir eine Darstellung der n -Sphäre S^n als eine Vereinigung zweier Mengen, deren Fundamentalgruppen wir bereits kennen.

BEWEIS (VON SATZ 3.25): Zu beweisen war: Die Fundamentalgruppe der Sphäre der Dimension $n \geq 2$ ist trivial, also

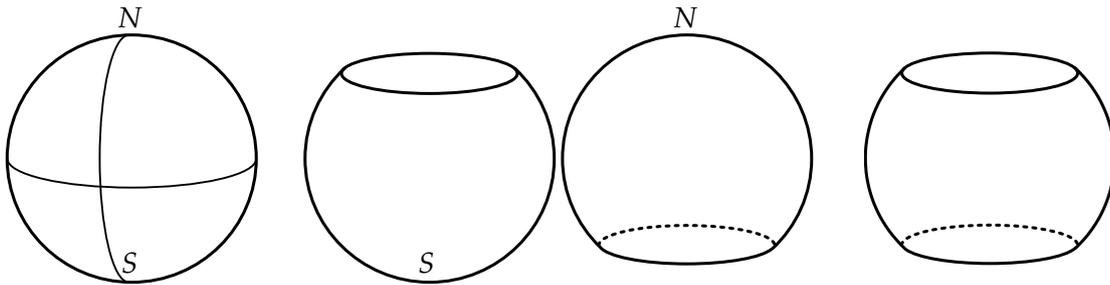
$$\pi_1(S^n) = (1).$$

Der einfachste Weg, dies zu bewerkstelligen ist, indem wir einfach die Kartengebiete des bekannten Atlas der stereographischen Projektionen benutzen. Die Kartengebiete sind hier $S^n \setminus \{N\}$ und $S^n \setminus \{S\}$, welche jeweils diffeomorph zu \mathbb{R}^n sind. Die Fundamentalgruppe von \mathbb{R}^n kennen wir aber schon aus Satz 3.23, sie ist $\pi_1(\mathbb{R}^n) = (1)$, trivial.

Die Teile, die wir nun in der Hand haben, erfüllen aber die Voraussetzungen des Satzes von Seifert-van Kampen: $U = S^n \setminus \{N\}$, $V = S^n \setminus \{S\}$, $X = U \cup V$, U, V und $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$ sind offen und wegzusammenhängend (denn es ist $n \geq 2$; für $n = 1$ ist $U \cap V = S^1 \setminus \{N, S\}$ nicht wegzusammenhängend) und es ist $\pi_1(U) = (1)$, $\pi_1(V) = (1)$. Damit erhalten wir, dass $\pi_1(S^n) = (1) * (1) / N$ ist. Da aber $(1) * (1) = (1)$ ist, kommt für N auch nur $N = (1)$ in Frage, und wir erhalten insgesamt:

$$\pi_1(S^n) = \pi_1(U) * \pi_1(V) = (1). \quad \blacksquare$$

Es ist anzumerken, dass wir dieser Stelle nur den Satz von Seifert-van Kampen benutzen, nicht die zusammenhängende Summenbildung.



(a) Die Sphäre S^2 , mit Nordpol N und Südpol S .

(b) Die beiden „Schalen“, aus denen die S^2 zusammengesetzt sind, ergeben sich, wenn jeweils N oder S entfernt werden. Beide Schalen sind einfach zusammenhängend, da sie diffeomorph zu \mathbb{R}^2 sind.

(c) Der Durchschnitt der beiden Schalen ist diffeomorph zu einem Zylinder. Dieser ist nicht einfach zusammenhängend.

Abbildung 4.8: Die Fundamentallgruppe der Sphäre $\pi_1(S^2)$ ergibt sich als das Sternprodukt der beiden Teile modulo der Fundamentallgruppe des Durchschnitts. Der Durchschnitt ist nicht einfach zusammenhängend, aber die beiden Teile sind es.

4.4 Zerlegung

Mindestens ebenso wichtig wie die Komposition neuer Mannigfaltigkeiten als zusammenhängende Summe von zweien ist es, eine „große“ Mannigfaltigkeit in kleinere Teile zerlegen zu können, also die Umkehrung der Summenbildung. Wie man schnell einseht, erzeugt die Summenbildung einer Mannigfaltigkeit mit einer Sphäre nichts neues, es ist $M \# S^n = M$. Das heißt, die Zerlegung einer Mannigfaltigkeit M in Komponenten $N_1 \# N_1 \# \dots \# N_k$ wird höchstens bis auf eine Menge von S^n eindeutig sein. Und tatsächlich stellt sich heraus, dass dies die einzigen Probleme sind, die bei der Zerlegung auftreten.

Der Prozess, mit dem Mannigfaltigkeiten zerlegt werden, ist der folgende:

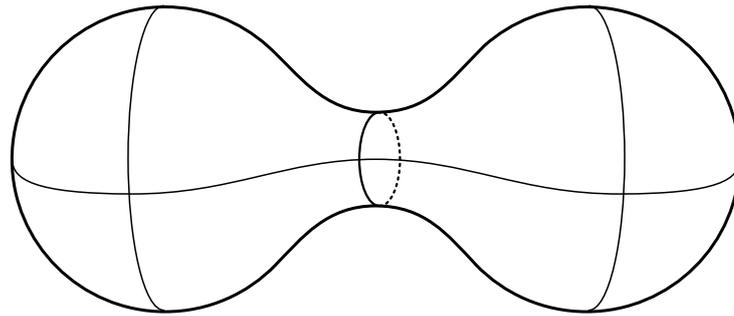
Definition 4.7: Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und S eine $n - 1$ -dimensionale, eingebettete Sphäre. Dann erhalten wir durch *Chirurgie entlang S* , das heißt, durch Entfernen einer kleinen zylindrischen Umgebung $\tilde{S} \cong S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ (falls eine solche existiert) von S höchstens zwei zusammenhängende Teile, die durch Auffüllen der Schnittstellen durch einen n -Ball zu Mannigfaltigkeiten werden. Wir schreiben

$$M|S = (N_1, N_2).$$

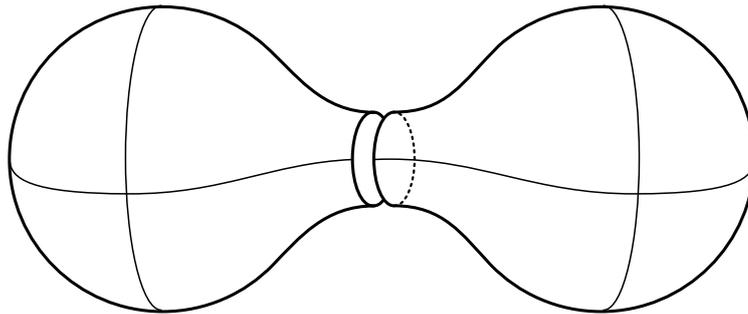
Eine Voraussetzung dafür, dass Chirurgie entlang einer eingebetteten Sphäre S möglich ist, ist dass das Normalenbündel $L \rightarrow S$ von S trivial ist, also $L \cong \mathbb{R}$. Nur dann haben wir überhaupt die Möglichkeit, dass eine zylindrische Umgebung $S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von S gefunden werden kann, entlang derer die Mannigfaltigkeit zerschnitten wird.

Es ist zu beachten, dass Chirurgie an einer Mannigfaltigkeit, wenn sie denn überhaupt möglich ist, *nicht immer* zwei Teile erzeugt, siehe z.B. Abbildung 4.10. Wir sind nur

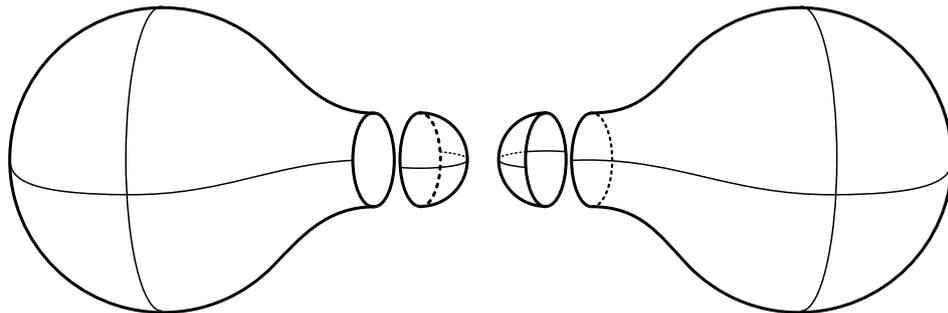
Kapitel 4. Zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten



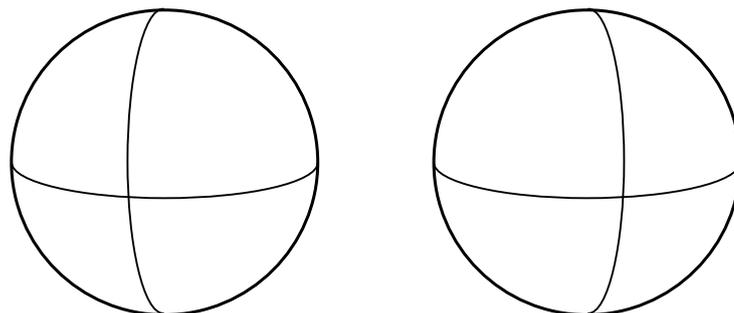
(a) Als Schnittkreis wird die markierte, eingebettete $S \cong S^1$ benutzt.



(b) Durch „Zerschneiden“ entlang S entstehen zwei Teile.



(c) Jedes der beiden nun berandeten Teilstücke erhält eine \mathbb{B}^2 aufgesetzt, die hier im Beispiel direkt so verbogen sind, dass sie die Löcher glatt auffüllen. Die beiden Teilstücke werden dadurch wieder zu unberandeten Mannigfaltigkeiten.



(d) Es entstehen zwei zu Sphären diffeomorphe Mannigfaltigkeiten.

Abbildung 4.9: Chirurgie am Beispiel der „Hantel“ aus Abbildung 4.1.

an solcherlei Art von Chirurgie interessiert, die zwei Summanden erzeugt, nicht an solcher, die „nur“ die Struktur der Mannigfaltigkeit verändert. Ein genauer Prozess, durch den solche Schnittkugeln gefunden werden können, kann hier jedoch nicht gezeigt werden.

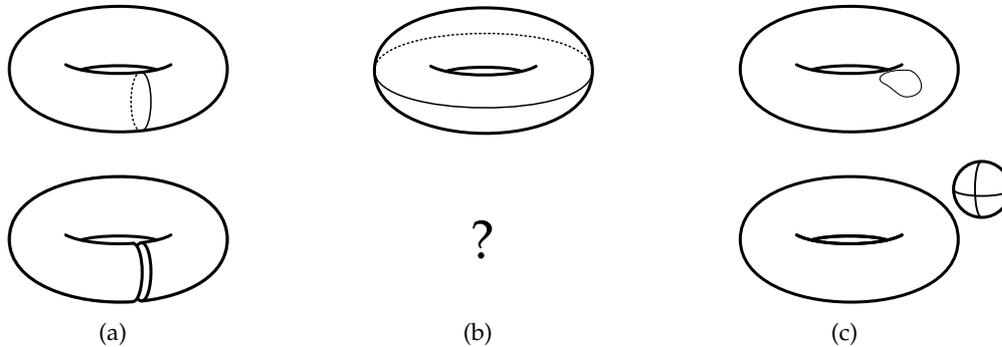


Abbildung 4.10: Chirurgie an einem Torus erzeugt *nicht immer* zwei Teile. Wählt man als Schnittkreis einen kleinen Umkreis wie in (a), so erhält man nach der Chirurgie einen Zylinder, also eine Mannigfaltigkeit, die diffeomorph zur Sphäre ist. Wählt man wie in (b) den großen Umkreis als Schnittkreis, so ist Chirurgie überhaupt nicht möglich, die entstehende Lücke kann nicht mit einem Ball gefüllt werden. Wählt man wie in (c) einen zusammenziehbaren Kreis, so erhält man zwar zwei Teilstücke, die auch Mannigfaltigkeiten werden, jedoch ist eine davon eine S^2 .

Solche Mannigfaltigkeiten, die nicht als Summe von zwei nicht-trivialen Summanden dargestellt werden können, heißen *prim*. Sie spielen eine große Rolle bei der Klassifizierung von 3-Mannigfaltigkeiten in Thurstons Geometrisierungsprogramm.

Definition 4.8: Eine Mannigfaltigkeit M , für die aus $M = N_1 \# N_2$ folgt, dass $N_1 = S^n$ oder $N_2 = S^n$ gilt, heißt *prim*.

Die Dekomposition einer Mannigfaltigkeit beruht nun auf einem fundamentalen Ergebnis von Kneser:

Theorem 4.1 (Primdekomposition): Für eine Mannigfaltigkeit M existiert eine Dekomposition $M = N_1 \# \dots \# N_k$, so dass N_i prim ist, und die Dekomposition ist eindeutig bis auf Summanden S^n .

BEWEIS: Siehe [3]. ■

Damit können wir auch die Zerlegung von Mannigfaltigkeiten in ihre zusammenhängenden Summanden als abgeschlossen betrachten, denn mehr kann man von einer Zerlegung kaum erwarten: Die Dekomposition existiert, ist endlich und die Summanden sind eindeutig (bis auf Faktoren S^n , die ja an jede Mannigfaltigkeit ansummiert werden können, ohne sie zu verändern).

5 Die Theorie der Flächen

Mit den gezeigten Beispielen aus Abschnitt 3.4 und der Möglichkeit, aus zwei Mannigfaltigkeiten eine neue zu erstellen, haben wir genügend Werkzeuge in der Hand, um die Flächen komplett zu erfassen.

Versuchen wir also einfach, Flächen aus den uns bekannten Bausteinen zu erzeugen, so erhalten wir diese Abfolge:

- Die einfachste Fläche, die uns bekannt ist, ist S^2 . Für die Charakterisierung der Flächen ist es sinnvoll, diese auch $\Sigma_0 := S^2$, die Fläche „ohne Loch“ zu nennen.
- Die zweite schon bekannte Mannigfaltigkeit ist der Torus $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, den wir hier auch $\Sigma_1 := \mathbb{T}^2$ nennen, die Fläche mit „einem Loch“.
- Erzeugen wir eine Summe aus einer Mannigfaltigkeit und einer Sphäre, so verändert sich die Mannigfaltigkeit nicht (siehe Abb. 5.1), d.h. es ist beispielsweise

$$S^2 \# S^2 \cong S^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{T}^2 \# S^2 \cong \mathbb{T}^2.$$

- Erzeugen wir jedoch eine zusammenhängende Summe aus zwei Tori (siehe auch Abb. 5.3), so erhalten wir etwas Neues:

$$\Sigma_2 := \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2.$$

Um die Fundamentalgruppe von Σ_2 zu berechnen, benötigen wir nach Korollar 4.6 noch die Fundamentalgruppe von $\mathbb{T}^2 \setminus \{\text{pt}\}$ und die Einbettung der Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} = \pi_1(S)$ in $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{\text{pt}\}) * \pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{\text{pt}\})$. Wir erhalten beides aus einer Betrachtung des Torus' als $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ wie in Lemma 2.23, dargestellt in 5.2. In dieser Darstellung wird sichtbar, dass der Torus ohne einen einzelnen Punkt

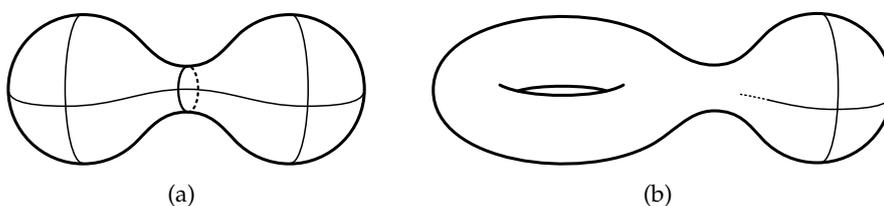
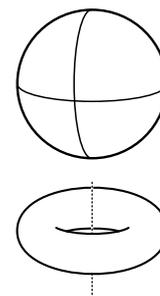


Abbildung 5.1: Zusammenhängende Summen aus Mannigfaltigkeiten und Sphären verändern die Mannigfaltigkeit nicht wesentlich: die zusammenhängende Summe ist diffeomorph zur Ausgangsmannigfaltigkeit.

homotopieäquivalent zu dem sog. Bukett aus zwei Schleifen, $S^1 \vee S^1$ ist. Dessen Fundamentalgruppe lässt sich mit dem Satz von Seifert-van Kampen ermitteln als $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ($U = S^1, V = S^1, U \cap V = \{\text{pt}\}$). Somit ist auch $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{\text{pt}\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{F}(a, b)$, die freie Gruppe in zwei Erzeugern. Auch die Einbettung von $\mathbb{Z} = \pi_1(S)$ erhalten wir aus dieser Darstellung; in der Bezeichnung aus der Abbildung ist $\pi_1(S) \simeq \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

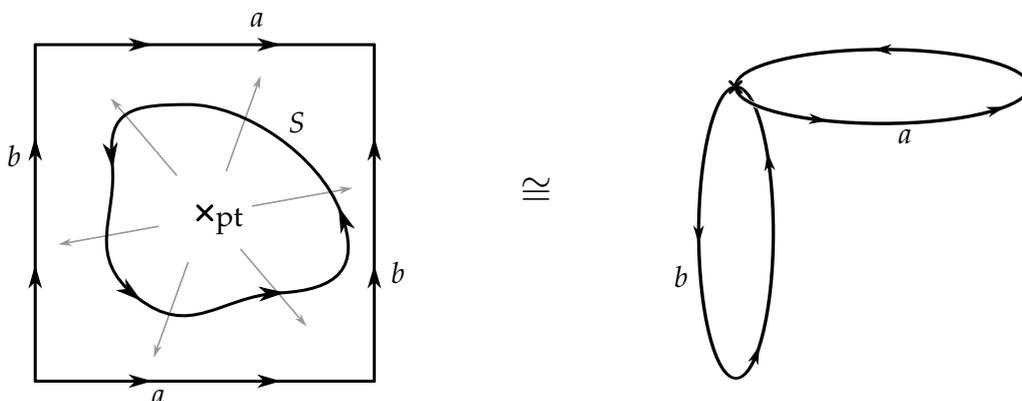


Abbildung 5.2: Der Torus \mathbb{T}^2 wird aufgefasst als $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Entfernt man einen einzelnen Punkt p aus diesem Torus sieht man, dass er homotopieäquivalent ist zu einem sog. Bukett aus zwei Kreisen, also zwei S^1 die an einem einzelnen Punkt verbunden sind (via der grau dargestellten Zusammenziehung). Das in $\mathbb{T}^2 \setminus \{\text{pt}\}$ eingeschriebene S ist also unter dieser Beziehung eingebettet als $aba^{-1}b^{-1}$ (ausgehend von der linken unteren Ecke).

Die Fundamentalgruppe von Σ_2 (der Fläche mit „zwei Löchern“) ergibt sich dann als

$$\pi_1(\Sigma_2) = ((\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})) / \pi_1(S),$$

wobei $\pi_1(S) \simeq \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ gilt. Da diese Gruppe etwas unhandlich ist betrachten wir deren Abelianisierung. Um diese berechnen zu können, müssen wir

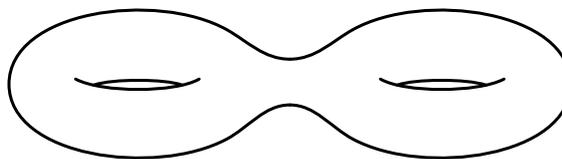


Abbildung 5.3: Die Fläche mit zwei Löchern, Σ_2 .

die Einbettung von $\pi_1(S) \leq \mathbb{F}(a_1, b_1, a_2, b_2) = \mathbb{Z}^{*4}$ betrachten. Aus dem Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen wissen wir, dass die Einbettung so geschehen

muss:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\mapsto \mathbb{F}(a_1, b_1, a_2, b_2) \\ 1 &\mapsto a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2.\end{aligned}$$

Die Einbettung von \mathbb{Z} in $\mathbb{F}(a_1, b_2, a_2, b_2)$ ist also eine Untergruppe der Kommutatoruntergruppe. Beim Übergang zur Abelianisierung können wir also diese Quotientenbildung ignorieren, und wir erhalten

$$\pi_1(\Sigma_2)^{\text{ab}} = (\mathbb{Z}^{*4})^{\text{ab}} = \mathbb{Z}^4.$$

Diese ist nicht isomorph zu einer der beiden bekannten Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathbb{S}^2) = (1)$ und $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$, und somit ist Σ_2 tatsächlich eine hier noch nicht beschriebene Fläche.

- Erzeugt man nun induktiv weitere Summen mit Tori, so erhält man eine Sammlung von Flächen dieser Form (siehe auch Abb. 5.4):

$$\Sigma_g = \Sigma_{g-1} \# \mathbb{T}^2 = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g\text{-mal}}.$$

Auch deren Fundamentalgruppen lassen sich mit ähnlichen Verfahren wie oben¹ induktiv berechnen als

$$\pi_1(\Sigma_g) = (\pi_1((\Sigma_{g-1}) \setminus \{\text{pt}\}) * \mathbb{Z}^2) / \mathbb{Z}.$$

Wie oben ist diese Gruppe sehr unhandlich, die Abelianisierung jedoch, wieder

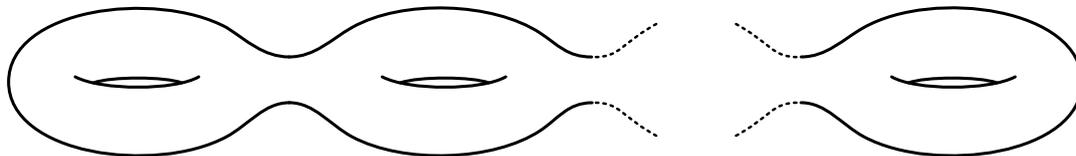


Abbildung 5.4: Erzeugt man die zusammenhängende Summe von $\Sigma_{g-1} \# \mathbb{T}^2$, so erhält man eine Fläche mit einem Henkel mehr, Σ_g .

analog zum oberen Fall, einfach zu verstehen: $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} = (\pi_1(\Sigma_{g-1})^{\text{ab}} \times \mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Nun müssen wir noch diese Gruppen zu unterscheiden wissen:

Lemma 5.1: Die Gruppen \mathbb{Z}^n und \mathbb{Z}^m sind für $n \neq m$ nicht isomorph,

$$\mathbb{Z}^n \not\cong \mathbb{Z}^m.$$

BEWEIS: Zu finden in jedem einführenden Text über Gruppentheorie, z.B. [9]. ■

¹Die genannten Techniken der Betrachtung sollten in jedem einführenden Text über algebraische Topologie zu finden sein, z.B. [8].

Kapitel 5. Die Theorie der Flächen

Wie oben sehen wir also, dass keine der bereits bekannten Fundamentalgruppen zu dieser isomorph sein kann, also unterscheiden sich die gefundenen Mannigfaltigkeiten tatsächlich alle voneinander.

Wir haben also inzwischen einen ordentlichen Zoo von Flächen angesammelt: $\Sigma_0 = S^2$, $\Sigma_1 = \mathbb{T}^2$, $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, $\Sigma_3 = \Sigma_2 \# \mathbb{T}^2$, ... Jede dieser Flächen wird durch eine Zahl $g \in \mathbb{N}_0$ identifiziert, welche auch *Genus* der Fläche genannt wird. Der Genus einer Fläche beschreibt hier, wie viele „Löcher“ eine Fläche hat und hängt daher eng mit der Eulercharakteristik zusammen. Es ist nämlich

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g,$$

dabei bezeichnet $\chi(X)$ die aus einer (beliebigen) Triangulierung berechnete Eulercharakteristik $\chi = V - E + F$ (Anzahl Knoten - Anzahl Kanten - Anzahl Dreiecke).

Nun stellt sich die Frage, ob und welche Flächen es noch geben könnte. Die Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 5.2 (Die Klassifikation der Flächen): *Jede kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist diffeomorph zu genau einem Σ_g für ein $g \in \mathbb{N}_0$.*

Leider erfordert der Beweis dieses Satzes eine Menge von Konstrukten, die in dieser Arbeit nicht besprochen werden können. Ein Beweis, der auf Morse-Theorie basiert, wird beispielsweise von Morris Hirsch in seinem Buch „Differential Topology“ gezeigt [4, Chapter. 9].

Mit diesem doch recht tiefgehenden Resultat haben wir nun die vollständige Kontrolle über alle kompakten, orientierbaren Flächen erlangt: Wir können zwei beliebige Flächen voneinander unterscheiden (wenn ihre Fundamentalgruppe nicht übereinstimmt), wir wissen, wann zwei Flächen diffeomorph sind (wenn ihre Fundamentalgruppe übereinstimmt) und wir wissen, welche Flächen überhaupt existieren.

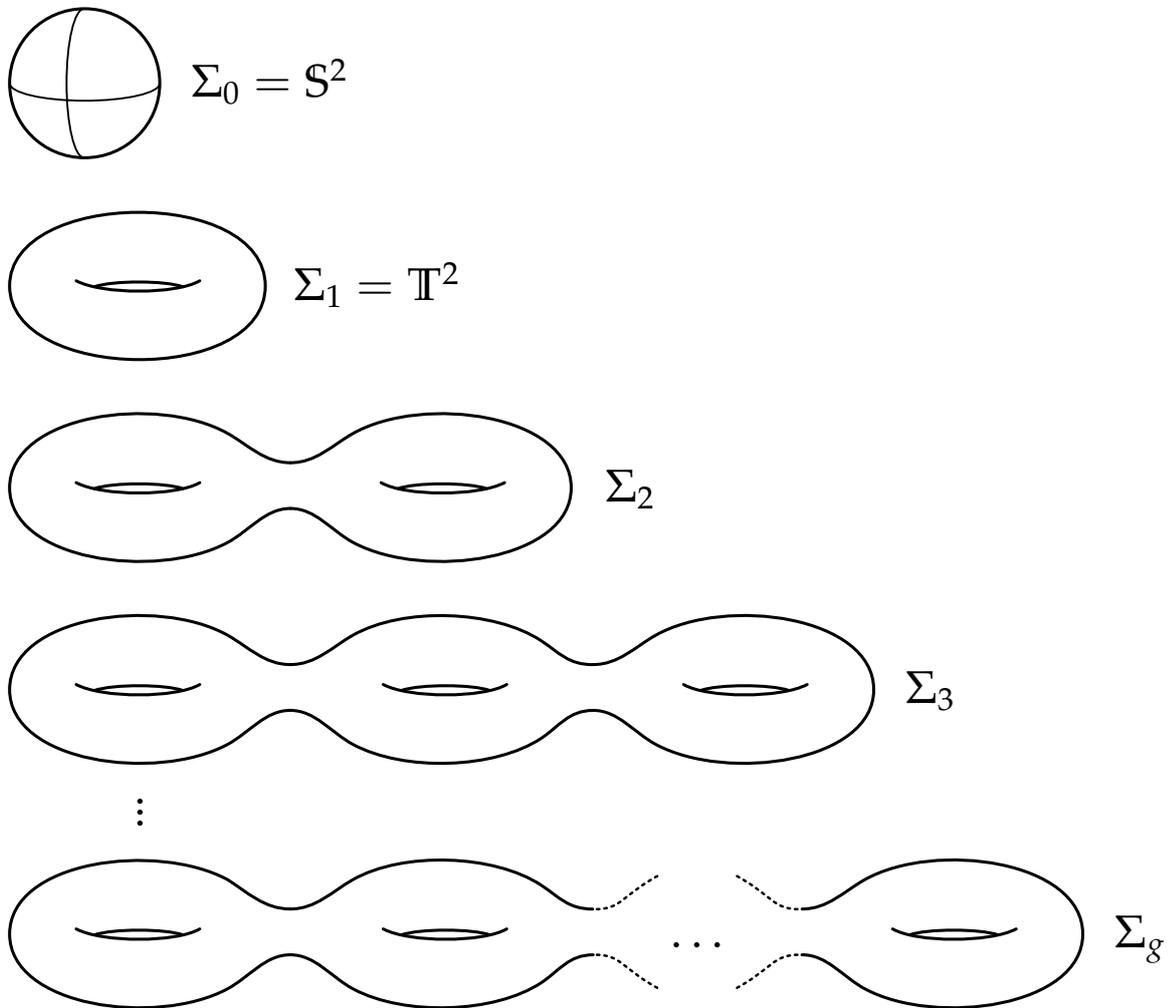


Abbildung 5.5: Der Zoo der Flächen: Jede existierende Mannigfaltigkeit der Dimension 2 entspricht genau einem Eintrag aus dieser Liste.

6 Quotienten von Mannigfaltigkeiten

Das zweite Werkzeug, das wir benötigen um die Klassifizierung der 3-Mannigfaltigkeiten im Thurston-Programm durchführen zu können ist die Quotientenbildung, welche aus einer „großen“ Mannigfaltigkeit eine „kleinere“ Mannigfaltigkeit herstellt¹. Dies ist sehr nützlich, da wir von Mannigfaltigkeiten mit einer sehr einfachen Struktur ausgehen können und daraus Quotienten bilden, die jede nur erdenkliche Eigenschaft haben. Tatsächlich besteht die Menge der Mannigfaltigkeiten, die den Ausgangspunkt für das Thurstonprogramm bildet aus nur *acht* Mannigfaltigkeiten.

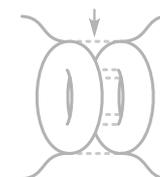
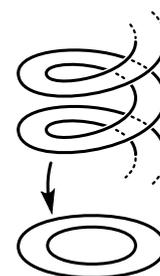
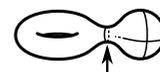
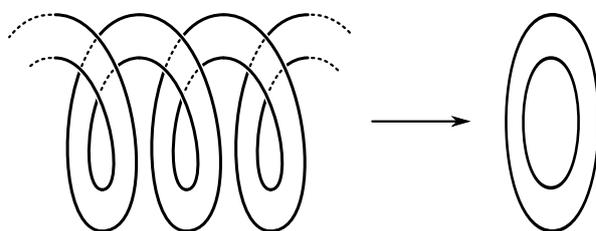


Abbildung 6.1: Die Quotientenbildung erzeugt aus einer „großen“ Mannigfaltigkeit eine „kleinere“, wobei verschiedene Eigenschaften erhalten werden.

Im Folgenden werden wir zuerst die formale Definition eines Quotienten einer Mannigfaltigkeit als Überlagerung definieren. Daraufhin werden wir eine Methode präsentieren, durch die Überlagerungen erzeugt werden können; Das Verhalten der Fundamentalgruppe bei der Quotientenbildung wird überwacht werden. Schließlich wenden wir die Theorie an, um die existierenden Flächen auf eine weitere Weise zu klassifizieren. Es ist anzumerken, dass die Überlagerungstheorie auch an sich einen interessanten Zweig der algebraischen Topologie darstellt. Viele der hier gezeigten Sätze haben daher Formulierungen, die wesentlich allgemeiner sind als die hier aufgeführten.

6.1 Überlagerung

Eine Überlagerung ist wie folgt definiert:

Definition 6.1: Sei M ein zusammenhängender topologischer Raum. Dann heißt stetige Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ mit einem zusammenhängenden \tilde{M} eine *Überlagerung* von M , wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von M gibt, so dass jedes Urbild

¹Die Bezeichnungen als „große“ oder „kleine“ Mannigfaltigkeiten sind nur in einem anschaulichen Sinne zu verstehen.

Kapitel 6. Quotienten von Mannigfaltigkeiten

$\pi^{-1}(U_i)$ Vereinigung disjunkter offener Mengen $\{U_i^{(j)}\}$ ist, und $\pi|_{U_i^{(j)}} : U_i^{(j)} \rightarrow U_i$ ein Homöomorphismus ist.

Eine Menge $U_i \subseteq M$ dieser Art heißt dann *gleichmäßig überlagert*.

Da einzelne Punkte unter der Überlagerung von besonderem Interesse sein werden, erhalten auch sie einen Namen:

Definition 6.2: Das Urbild F eines Punktes $x \in M$, also $F = \pi^{-1}(x)$ heißt *Faser* von p über M . Jede dieser Fasern trägt dann als Teilraumtopologie offenbar die diskrete Topologie.

Wir werden uns später auf solche Überlagerungen $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ zurückziehen können, für die $\pi_1(\tilde{M}) = (1)$ gilt.

Definition 6.3: Eine Überlagerung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, so dass \tilde{M} einfach zusammenhängend ist, also $\pi_1(\tilde{M}) = (1)$, heißt *universelle Überlagerung*.

Die hier gegebene Definition ist äquivalent zur folgenden Definition (ohne Beweis):

Definition 6.4: Die *universelle Überlagerung* $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow M$ einer Mannigfaltigkeit M ist eine solche, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine weitere Überlagerung von M , so existiert genau ein Überlagerungsmorphismus $\Phi : (\hat{M}, \hat{\pi}) \rightarrow (\tilde{M}, \pi)$ (also $\pi \circ \Phi = \hat{\pi}$), so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{M} \\ \hat{\pi} \downarrow & \searrow \pi & \\ M & & \end{array}$$

Es folgt, dass $(\hat{M}, \hat{\pi})$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist und einfach zusammenhängend ist, sofern es existiert.

Die zuletzt gegebene Definition erklärt die Wahl des Begriffes *universelle Überlagerung*: jede andere Überlagerung des topologischen Raumes M kann erweitert werden zur gegebenen universellen Überlagerung. Für uns wird im Folgenden aber wichtiger sein, dass die Mannigfaltigkeit, aus der der Quotient gebildet wird, einfach zusammenhängend ist. Die Äquivalenz der beiden Definitionen soll hier nicht gezeigt werden.

Wir benötigen nun also einen Prozess, wie wir solche Überlagerungen bekommen können.

6.2 Operationen

Das Ziel, das wir zu erreichen versuchen ist, aus einer Mannigfaltigkeit und einem weiteren Objekt einen Quotienten zu bilden so dass auf eine kontrollierte Weise ein

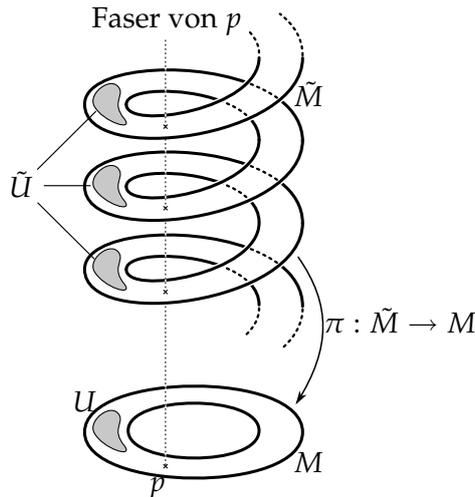


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung der Definition von Überlagerung anhand einer Überlagerung der (berandeten) Mannigfaltigkeit $[0, 1] \times S^1$. Nimmt man an, dass \tilde{M} einfach zusammenhängend ist, also unendlich nach unten und oben fortgesetzt wird, so handelt es sich hier um eine universelle Überlagerung.

„großer“ Raum \tilde{M} so „zusammengefaltet“ werden kann, dass ein kleinerer Raum M dabei herauskommt.

Der genaue Vorgang, mittels welchem dies erreicht wird, ist wie folgt:

Definition 6.5 (Operation auf einem top. Raum): Sei X ein topologischer Raum und Γ eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *topologische Gruppe*, wenn Γ zusätzlich zur Gruppeneigenschaft eine topologische Struktur trägt, so dass die Gruppenoperation und die Inversenbildung stetig sind.

Für eine solche topologische Gruppe heißt eine stetige Abbildung

$$\Phi : \Gamma \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g.x$$

eine *Operation durch Homöomorphismen auf X* , wenn gilt:

- $1.x = x$ für alle $x \in X$.
- $(gh).x = g.(h.x)$ für alle $g, h \in \Gamma$ und alle $x \in X$.

Es ist leicht zu zeigen, dass jedes einzelne Gruppenelement $g \in \Gamma$ durch einen Homöomorphismus $\Phi_g : X \rightarrow X : x \mapsto g.x$ wirkt. Die Umkehrung von Φ_g ist dann $\Phi_{g^{-1}}$, also

$$\Phi_g \Phi_{g^{-1}}(x) = g.(g^{-1}.x) = (gg^{-1}).x = id_X(x),$$

und ebenso ist $\Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g = id_X$.

Da wir im weiteren Verlauf aber hauptsächlich an Mannigfaltigkeiten interessiert sind, spezialisieren wir die Definition einer Operation auf Mannigfaltigkeiten. Dies hat den

Vorteil, dass wir nicht nur Homöomorphismen erhalten, sondern direkt Diffeomorphismen.

Definition 6.6 (Operation durch Diffeomorphismen): Eine topologische Gruppe Γ , die gleichzeitig auch noch eine glatte Mannigfaltigkeit ist, heißt eine *Liegruppe*². Sei M eine Mannigfaltigkeit und Γ eine Liegruppe. Die *Operation durch Diffeomorphismen* (oder auch einfach *Operation*) von Γ auf M ist gegeben durch eine glatte Abbildung

$$\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M : (g, p) \mapsto g \cdot p$$

wenn gilt:

- Die Abbildung $\Phi_g : M \rightarrow M : p \mapsto g \cdot p$ ist differenzierbar für alle $g \in \Gamma$.
- Es ist $1 \cdot p = p$ für alle $p \in M$.
- Für alle $g, h \in \Gamma$ und alle $p \in M$ ist die Operation assoziativ, d.h. es gilt: $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$.

Man schreibt dann auch einfach $g(x) := \Phi_g(x)$.

Die Beschränkung auf Liegruppen ist auf den ersten Blick eine sehr starke Einschränkung: Welche Gruppe könnte schon eine Mannigfaltigkeitsstruktur tragen? Da wir aber im Folgenden fast ausschließlich *diskrete* Gruppen betrachten werden, welche automatisch Liegruppen der Dimension 0 sind (sofern die Gruppe abzählbar ist), stört die Beschränkung auf Liegruppen die späteren Betrachtungen nicht wirklich.

Wie oben ist tatsächlich Φ_g ein Diffeomorphismus mit Inversem $\Phi_{g^{-1}}$, denn es ist $\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}} = \text{id}_M$ (und auch $\Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g = \text{id}_M$ und damit Φ_g bijektiv und differenzierbar. Betrachtet man anders herum die Menge der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit $\text{Diff}(M)$ mit der Verkettung, so erhalten wir daraus ebenfalls eine Gruppe. Für eine Operation $\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M$ wird damit die Abbildung

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M) : g \mapsto \Phi_g$$

ein Gruppenhomomorphismus. Man nennt diese Abbildung daher auch eine *Darstellung von Γ* als eine Transformationsgruppe von M . Ist der Homomorphismus $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$ injektiv, so nennt man die Operation auch *effektiv*, d.h. für $g \cdot p = p$ für alle $p \in M$ folgt $g = 1$. Man kann dann Γ mit $\rho(\Gamma)$ identifizieren und die Wirkung ist damit klar.

Die Darstellungstheorie selbst ist ein eigener Teil der Algebra, so dass auch hier für die meisten Sätze wesentlich allgemeinere Formulierungen existieren. Diese können hier aufgrund des Umfangs nicht gezeigt werden, es sei verwiesen auf [2].

Wir benötigen noch ein paar weitere Begriffe, um Operationen genauer beschreiben zu können:

²Benannt nach Marius Sophus Lie, *17.12.1842, †18.2.1899, norwegischer Mathematiker.

Definition 6.7: Sei Γ eine Operation auf M .

Für $p \in M$ nennt man

$$\Gamma p := \{g.p : g \in \Gamma\}$$

die *Bahn von p* oder den *Orbit von p* unter Γ .

Durch die Operation einer Gruppe Γ auf einer Mannigfaltigkeit M wird eine Äquivalenzrelation auf M erzeugt, nämlich durch die Zugehörigkeit zu den Bahnen.

Lemma 6.8: Sei Γ eine Operation auf M . Durch die Verknüpfung

$$p \sim q :\Leftrightarrow q \in \Gamma p \text{ für } p, q \in M$$

wird eine Äquivalenzrelation definiert.

BEWEIS: Wir prüfen die Eigenschaften einzeln nach:

- Für $1 \in \Gamma$ ist für alle $p \in M$: $1.p = p$, also $p \sim p$.
- Für $p, q \in M$ mit $p \sim q$ existiert also ein $g \in \Gamma$, so dass $q = g.p$. Dann ist $p = (g^{-1}g).p = g^{-1}.q$ und folglich auch $q \sim p$.
- Für $p, q, r \in M$ mit $p \sim q$ und $q \sim r$ existieren also $g, h \in \Gamma$, so dass $q = g.p$ und $r = h.q$. Dann ist $r = h.q = h.(g.p) = (hg).p$ und somit $p \sim r$.

Folglich ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M . ■

Schließlich noch ein Begriff, der bestimmte Operationen beschreibt, welche später wichtig werden:

Definition 6.9 (eigentlich diskontinuierliche Operation): Sei Γ eine Operation auf M . Man sagt, dass Γ *eigentlich diskontinuierlich* auf M durch Diffeomorphismen operiert (siehe auch Abb. 6.3), wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ gibt, so dass für alle $g, h \in \Gamma$ mit $g \neq h$ gilt:

$$g(U) \cap h(U) = \Phi_g(U) \cap \Phi_h(U) = \emptyset.$$

Eine Operation Γ auf M heißt *frei*, falls gilt:

$$g.p = p \text{ für ein } p \in M \Rightarrow g = 1.$$

Jede eigentlich diskontinuierliche Operation ist auch stets eine freie Operation:

Lemma 6.10: Sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf M . Dann ist Γ auch eine freie Operation auf M .

BEWEIS: Es sei also $g \in \Gamma$ und $p \in M$ mit $g.p = p$. Angenommen, es sei $g \neq 1 \in \Gamma$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq M$ von p , so dass nach Voraussetzung gilt:

$$\emptyset = g(U) \cap 1(U) = g(U) \cap U.$$

Da aber $g.p = p \in U$ gelten sollte, ist jedenfalls $p \in g(U) \cap U$, und somit ist die Annahme falsch. Es folgt, dass $g = 1$ ist, und somit ist Γ eine freie Operation. ■

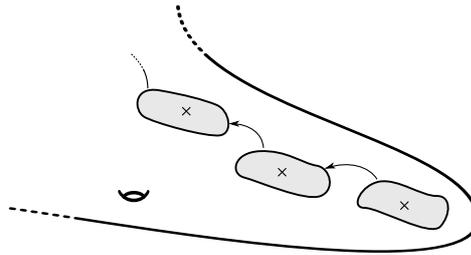


Abbildung 6.3: Eine eigentlich diskontinuierliche Operation bildet eine Umgebung eines Punktes so ab, dass sich keine zwei Bilder schneiden.

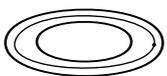
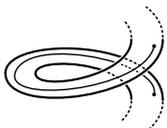
Mit diesen speziellen Operationen werden wir in Kürze Quotienten aus Mannigfaltigkeiten erzeugen können. Bevor wir dies tun, müssen wir allerdings die Werkzeuge zu rechtlegen, die wir benötigen, um auch die Veränderungen an der Fundamentalgruppe verfolgen zu können.

6.3 Lifts

Wir benötigen im Folgenden eine Möglichkeit, für eine Überlagerung $\tilde{M} \rightarrow M$ Wege in M auf Wege in \tilde{M} abbilden zu können, um damit im nächsten Schritt die Fundamentalgruppe der überlagerten Mannigfaltigkeit M berechnen zu können. Diese Abbildung wird „Lift“ genannt.

Definition 6.11: Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung. Für einen topologischen Raum Y und eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow M$ heißt jede stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{M}$ mit $\pi \circ \tilde{f} = f$ ein *Lift* von f .

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{M} & \\
 \tilde{f} \nearrow & & \downarrow \pi \\
 Y & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$



Lifts geschlossener Pfade sind nicht immer geschlossen.

Ist $Y = [0, 1]$ und $f = \alpha$ ein Weg in M , so nennt man $\tilde{\alpha}$ einen *gelifteten Weg*.

Ist ein Weg in M geschlossen, so braucht dies für Lifts nicht mehr zu gelten. Abgesehen davon gibt es im Allgemeinen mehr als einen Lift für jeden Weg, nämlich genau so viele, wie es Urbilder des Anfangs in der Faser gibt (siehe Abbildung 6.5). Um nun einen gelifteten Weg eindeutig zu machen, reicht es aus, den Anfangspunkt festzulegen:

Lemma 6.12: Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung, $x_0 \in M$ und $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ ein Weg in M mit $\alpha(0) = x_0$. Zu jedem $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ existiert genau ein Lift $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

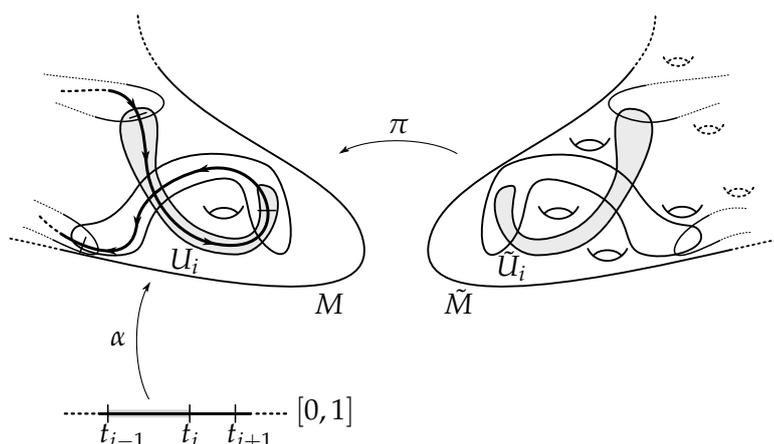


Abbildung 6.4: Eine Unterteilung $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$, so dass die einzelnen Teilstücke $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ des Pfades α gleichmäßig überlagert sind.

BEWEIS: Sei dazu $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ eine Unterteilung von $[0, 1]$, so dass $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ für gleichmäßig überlagerte offene Mengen $U_i \subseteq M$ (für jedes $i = 1, \dots, k$) (siehe Abbildung 6.4).

Dann setzen wir

$$\tilde{\alpha}_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{M} : \tilde{\alpha}_1 := (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1} \circ \alpha|_{[t_0, t_1]}$$

wobei \tilde{U}_1 das „Blatt“ über U_1 ist, welches \tilde{x}_0 enthält. Folglich ist $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{x}_0$.

Dann setzen wir $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}_1(t_1)$ und setzen den Prozess für die verbleibenden Stücke für $i = 2, \dots, k$ induktiv fort und erhalten somit $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ als Lift von α . Damit ist die Existenz des Lifts gezeigt.

Seien für die Eindeutigkeit $\tilde{\beta}_1$ und $\tilde{\beta}_2$ Lifts von α mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 . Sei dann $\hat{t} \in [0, 1]$ so, dass $\tilde{\beta}_1(\hat{t}) \neq \tilde{\beta}_2(\hat{t})$ ist. Angenommen, $\alpha(\hat{t})$ liege in U_1 . Da das „Blatt“ \tilde{U}_1 durch die Bedingung $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_1$ eindeutig bestimmt ist, ist der einpunktige Lift $\tilde{\alpha}(\hat{t}) = \pi^{-1}(\alpha(\hat{t})) \cap \tilde{U}_1$ ebenfalls eindeutig bestimmt. Da aber $\tilde{\beta}_1(\hat{t})$ und $\tilde{\beta}_2(\hat{t})$ genau diesem Lift entsprechen müssen, sind diese damit ebenfalls eindeutig bestimmt.

Also liegt $\alpha(\hat{t})$ nicht in U_1 . Setzt man dies induktiv fort, erhält man, dass $\alpha(\hat{t}) \notin U_i$ für alle $i = 1, \dots, k$ ist, was ein Widerspruch ist. Folglich stimmen $\tilde{\beta}_1$ und $\tilde{\beta}_2$ auf ganz $[0, 1]$ überein. ■

Um nun geliftete Wege wirklich anwenden zu können, benötigen wir noch, dass Lifts von Wegen, die homotop sind und auf den gleichen Anfangspunkt geliftet werden, ebenfalls homotop sind.

Lemma 6.13: Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ zwei Wege mit gleichen Endpunkten, die homotop relativ $\{0, 1\}$ sind. Ist nun $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ die Lifts von α und β mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$, so sind auch $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop relativ $\{0, 1\}$, und insbesondere ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

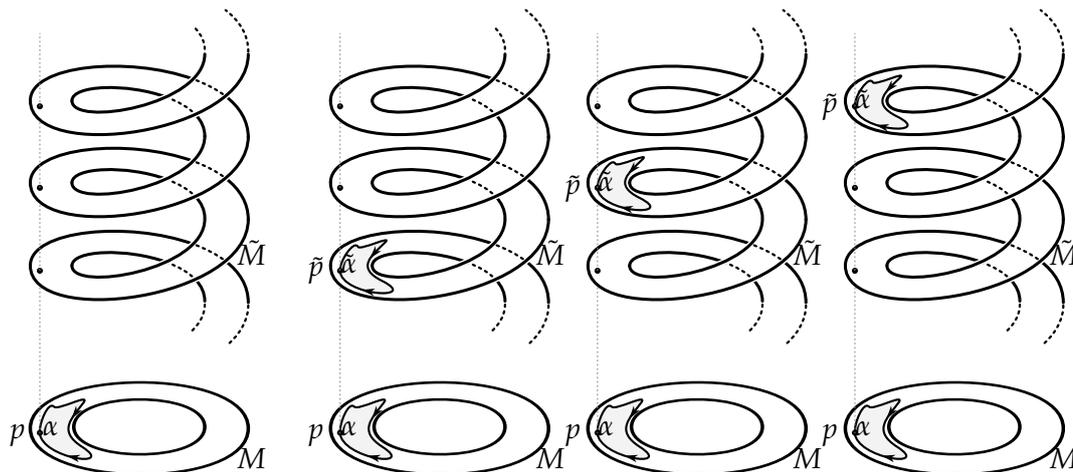
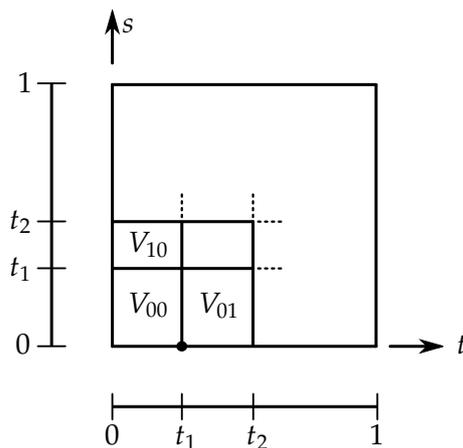


Abbildung 6.5: Lifts eines Pfades α mit Aufpunkt p können an jedem \tilde{p} in der Faser $\pi^{-1}(p)$ festgemacht werden.

BEWEIS: Sei $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ eine Homotopie zwischen α und β relativ $\{0, 1\}$, also mit festen Endpunkten. Wir werden einen Lift $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ von H konstruieren, so dass $\pi\tilde{H} = H$ ist und $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}$. Sobald wir dies erreicht haben, ist für alle $s \in [0, 1]$ wahr, dass $\pi\tilde{H}(0, s) = H(0, s) = x_0$ und $\pi\tilde{H}(1, s) = H(1, s) = x_1$, und weil die Mengen $\pi^{-1}(x_0)$ und $\pi^{-1}(x_1)$ diskret sind folglich $\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{H}(1, s) = \tilde{x}_1$. Damit erhalten wir, dass \tilde{H} eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ ist zwischen $t \mapsto \tilde{H}(t, 0)$ und $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts (Lemma 6.12) wissen wir nun, dass $\tilde{\alpha} = \tilde{H}(t, 0)$ und $\tilde{\beta} = \tilde{H}(t, 1)$ sein muss.

Wähle also $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ so fein, dass die Mengen $V_{ij} := [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ gleichmäßig überlagert sind, also dass $H(V_{ij}) \subseteq U_{ij} \subseteq M$ für gleichmäßig überlagerte offene Mengen $U_{ij} \subseteq M$ ist. Sei \tilde{U}_{00} das Blatt über U_{00} , welches \tilde{x}_0



enthält. Setze dann

$$\tilde{H}_{00} := (\pi|_{\tilde{U}_{00}})^{-1} \circ H|_{V_{00}}.$$

Sei nun $\tilde{x}_{10} := \tilde{H}_{00}(t_1, t_0)$ und \tilde{U}_{10} das Blatt über U_{10} , welches \tilde{x}_{10} enthält und setze

$$\tilde{H}_{10} := (\pi|_{\tilde{U}_{10}})^{-1} \circ H|_{V_{10}}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Liftung von Wegen ist $\tilde{H}_{00} = \tilde{H}_{10}$ auf $\{t_1\} \times [t_0, t_1]$, und somit ist \tilde{H} nun auf $V_{00} \cup V_{10}$ wohldefiniert und stetig.

Das Verfahren kann fortgesetzt werden, so dass in jedem Schritt ein weiteres V_{ij} hinzugefügt werden kann, und damit ist \tilde{H} auf ganz $[0, 1] \times [0, 1]$ wohldefiniert und stetig. ■

Damit ist, im Wesentlichen und für unsere Zwecke, das Liftungsproblem gelöst: Für jeden wählbaren Basispunkt eines Anfangspunktes $p \in M$ existiert für einen Weg α genau ein Lift $\tilde{\alpha}$; und ein Weg β der homotop zu α ist, wird, wenn wir den gleichen Fußpunkt wählen, auf einen eindeutig festgelegten Weg $\tilde{\beta}$ geliftet, der homotop zu $\tilde{\alpha}$ ist, $\tilde{\beta} \simeq \tilde{\alpha}$, und den gleichen Endpunkt hat, $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$.

Leider reichen die gesammelten Informationen noch nicht, um die Fundamentalgruppe von M bereits bestimmen zu können. Wir benötigen ein weiteres Bauteil, die charakteristische Untergruppe von π in $\pi_1(\tilde{M})$.

Allgemein ordnen wir jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen einen Homomorphismus zu:

Definition 6.14: Seien X und Y topologische Räume und $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ stetig. Wir nennen

$$f_* = \pi(f) : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

den von f induzierten Gruppenhomomorphismus.

Lemma 6.15: Es ist f_* wirklich ein Homomorphismus.

BEWEIS: Wohldefiniertheit: Sind $\alpha \simeq \beta$ mittels H , so sind $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ mittels $f \circ H$.

Homomorphie: Nach Definition ist $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$, und folglich ist $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta])$. ■

Die Basispunkte sind auch hier nicht weiter von Belang, da wir Gruppen nur bis auf Isomorphie unterscheiden; wir werden sie also nicht weiter mit notieren.

Die speziellen stetigen Abbildungen, auf die es uns ankommt, sind die Überlagerungen (betrachtet als einfache stetige Abbildungen zweier topologischer Räume), deshalb benutzen wir hierfür einen speziellen Namen:

Definition 6.16: Für eine Überlagerung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ nennt man $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{M})) \subseteq \pi_1(M)$ die charakteristische Untergruppe von $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$

Eine Überlagerung $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$ heißt regulär, wenn ihre charakteristische Untergruppe $\pi_*(\pi_1(\tilde{N})) \trianglelefteq \pi_1(N)$ ein Normalteiler ist.

Und schließlich möchten wir noch H mit $\pi_1(M)$ identifizieren:

Lemma 6.17: Die Abbildung $\pi_* : \pi_1(\tilde{M}) \rightarrow \pi_1(M)$ ist injektiv, und damit ist $H \cong \pi_1(M)$.

BEWEIS: Sei dazu $\tilde{\alpha}$ ein geschlossener Weg in \tilde{M} , $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ und $\alpha \simeq c_{x_0}$. Da $\tilde{\alpha}$ ein Lift von α ist und $c_{\tilde{x}_0}$ ein Lift von c_{x_0} (beide mit Anfangspunkt \tilde{x}_0) folgt, dass $\tilde{\alpha} \simeq c_{\tilde{x}_0}$ gilt und somit π_* injektiv ist. ■

Nun haben wir alle notwendigen Sätze gesammelt und können uns daran wagen, die überlagerten Mannigfaltigkeiten und ihre Fundamentalgruppe zu betrachten zu.

6.4 Überlagerungen, Mannigfaltigkeiten und die Fundamentalgruppe

Wir werden also nun die von einer Operation erzeugten Äquivalenzklassen benutzen, um eine neue Mannigfaltigkeit daraus zu machen:

Definition 6.18 (Bahnenraum): Sei $\Gamma \times M \rightarrow M$ eine Operation einer Gruppe Γ auf einer Mannigfaltigkeit M durch Diffeomorphismen. Man nennt dann den Quotienten M/\sim mit der Äquivalenzrelation \sim aus Definition 6.6 den *Bahnenraum von M unter Γ* und schreibt M/Γ .

Dieses neu definierte Objekt M/Γ ist der entscheidende Trick: Wir erhalten aus einer Mannigfaltigkeit und einer Gruppe ein neues Gebilde, das selbst wieder eine Mannigfaltigkeit ist:

Satz 6.19: Sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf \tilde{M} und $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ die kanonische Projektion auf den Bahnenraum. Dann existiert auf \tilde{M}/Γ eine differenzierbare Struktur, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit N ist eine Abbildung $\Phi : \tilde{M}/\Gamma \rightarrow N$ genau dann differenzierbar, wenn $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist.

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{M} & \\
 \Phi \circ \pi \swarrow & & \downarrow \pi \\
 N & \longleftarrow & \tilde{M}/\Gamma
 \end{array}$$

BEWEIS: Sei dazu $p \in M = \tilde{M}/\Gamma$ und $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Dann gibt es eine zusammenhängende und offene Umgebung $\tilde{U}'_{\tilde{p}} \subseteq \tilde{M}$ von \tilde{p} , so dass

$$g(\tilde{U}'_{\tilde{p}}) \cap h(\tilde{U}'_{\tilde{p}}) = \emptyset \text{ für } g, h \in \Gamma, g \neq h.$$

Folglich existiert eine weitere zusammenhängende, offene Umgebung $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ von \tilde{p} , so dass eine Karte

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{p}} : \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

6.4. Überlagerungen, Mannigfaltigkeiten und die Fundamentalgruppe

um \tilde{p} existiert. Wir setzen nun

$$U_p := \pi(\tilde{U}_{\tilde{p}}) \subseteq M.$$

Damit ist $\pi(U_p) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\tilde{U}_{\tilde{p}})$, und folglich ist U_p offen und $\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}} : \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow U_p$ ein Homöomorphismus. Wir definieren jetzt eine Karte

$$\varphi_p : U_p \rightarrow V_p := \tilde{V}_{\tilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n : \varphi_p := \tilde{\varphi}_{\tilde{p}} \circ (\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}})^{-1}$$

und erhalten dadurch, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

Im Folgenden werden wir zeigen, dass $\mathfrak{A} = \{\varphi_p\}_{p \in M}$ sogar ein differenzierbarer Atlas auf M ist. Seien dazu $p_1, p_2 \in M$, so dass die Umgebungen $U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ nicht schnittfrei sind. Sei weiter $p_0 \in U_{p_1} \cap U_{p_2}$ und $U_{p_0} \subseteq U_{p_1} \cap U_{p_2}$ eine zusammenhängende, offene Umgebung von p_0 . Definiere:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &:= \tilde{U}_{\tilde{p}_1} \cap \pi^{-1}(U_0) \\ \tilde{U}_2 &:= \tilde{U}_{\tilde{p}_2} \cap \pi^{-1}(U_0) \\ \tilde{p}_0 &:= (\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}_1}})^{-1}(p_0) \text{ und} \\ \tilde{\tilde{p}}_0 &:= (\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}_2}})^{-1}(p_0) \end{aligned}$$

Da $\pi(\tilde{p}_0) = p = \pi(\tilde{\tilde{p}}_0)$, existiert ein $g \in \Gamma$ mit $\tilde{\tilde{p}}_0 = g \cdot \tilde{p}_0$ und somit ist $\tilde{U}_2 = g(\tilde{U}_1)$, denn es ist $g(\tilde{U}_1) \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$ für $g \neq h$ und $g : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$ ist ein Diffeomorphismus. Da $\pi \circ g = \pi$, ist mit $\varphi_1 := \varphi_{p_1}$ und $\varphi_2 := \varphi_{p_2}$ Folgendes richtig:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) &= (\tilde{\varphi}_2 \circ (\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_1 \circ (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1})^{-1}(x) \\ &= \tilde{\varphi}_2 \circ \underbrace{(\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ (\pi|_{\tilde{U}_1})}_{=g} \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}(x) \\ &= \tilde{\varphi}_2 \circ g \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}(x). \end{aligned}$$

Damit ist also auch $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar, und somit die Menge der Karten $\{\varphi_p\}_{p \in M}$ ein differenzierbarer Atlas.

Zusammen mit dieser Struktur ist auch die Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ differenzierbar. Sei dazu $\tilde{p} \in \tilde{M}$ und $p = \pi(\tilde{p})$. Dazu existiert ein $g \in \Gamma$, so dass $\tilde{p} = g \cdot \tilde{p}$ ist. In den Karten $\varphi = \varphi_p$ um p und $\tilde{\varphi}_{\tilde{p}} = \tilde{\varphi}$ um \tilde{p} , also $\tilde{\varphi} \circ g^{-1}$ um \tilde{p} wird π zu Folgendem:

$$\varphi \circ \pi \circ (\tilde{\varphi} \circ g^{-1})^{-1} = \underbrace{(\tilde{\varphi} \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}) \circ \pi \circ \gamma \circ \tilde{\varphi}^{-1}}_{=id} = id$$

und damit insbesondere differenzierbar.

Kapitel 6. Quotienten von Mannigfaltigkeiten

Damit können wir schließlich die gesuchte universelle Eigenschaft nachweisen: Falls $\Phi : \tilde{M}/\Gamma \rightarrow N$ differenzierbar ist, so ist auch $\Phi \circ \pi$ differenzierbar. Ist umgekehrt $\Phi : \tilde{M}/\Gamma \rightarrow N$ stetig, so dass $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist, so existiert für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\varphi_p = \varphi$ um p und eine beliebige Karte ψ um $q = \Phi(p)$, so dass für die Karte $\tilde{\varphi}_{\tilde{p}} = \tilde{\varphi}$ um $\tilde{p} \in \tilde{M}$ gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \Phi \circ (\tilde{\varphi} \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1})^{-1} = \psi \circ \Phi \circ (\pi|_{\tilde{U}}) \circ \tilde{\varphi}^{-1}.$$

Da $\Phi \circ \pi$ nach Voraussetzung differenzierbar war, ist diese Verkettung differenzierbarer Abbildungen damit ebenso differenzierbar. ■

Wir haben also durch eine beliebige eigentlich diskontinuierliche Operation auf einer Mannigfaltigkeit eine komplett neue Mannigfaltigkeit erschaffen, und insbesondere ist $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ eine Überlagerung.

Satz 6.20: Sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf \tilde{M} und $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ die kanonische Projektion auf den Bahnenraum. Dann ist π eine Überlagerung.

BEWEIS: Sei $M := \tilde{M}/\Gamma$ und $p \in M$ beliebig, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ und somit $x = \Gamma\tilde{x} = [\tilde{x}]$. Wir wählen eine Umgebung \tilde{U} von \tilde{x} so dass $g_1(\tilde{U}) \cap g_2(\tilde{U}) = \emptyset$ für beliebige $g_1 \neq g_2$ gilt. Dann gilt für $U := \pi(\tilde{U}) \subseteq M$:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\tilde{U})$$

und $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ ist stetig, bijektiv und auch offen, denn für ein $\tilde{V} \subseteq \tilde{M}$ ist $\pi^{-1} \circ \pi(\tilde{V}) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\tilde{V}) \subseteq M$, weil jedes $g \in \Gamma$ als Diffeomorphismus operiert. Aus diesem Grund ist auch $\pi|_{g(\tilde{U})} \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus (denn es ist $\pi|_{g(\tilde{U})} = (p|_{\tilde{U}}) \circ g^{-1}$). Also ist π eine Überlagerung. ■

Das aber heißt, dass wir die Begriffe, die wir bis hier entwickelt haben alle weiter benutzen können. Und tatsächlich haben wir nicht nur irgendeine Überlagerung gefunden, sondern sogar eine von besonderer Natur:

Lemma 6.21: Sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf einer Mannigfaltigkeit \tilde{M} . Dann ist $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma = M$ eine reguläre Überlagerung.

BEWEIS: Es ist zu zeigen, dass $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{M}))$ ein Normalteiler in $\pi_1(M)$ ist. Sei dazu $[v] \in H$ und $[\alpha] \in \pi_1(M)$. Dann ist $[\alpha * v * \alpha^{-1}] \in \pi_1(M)$, und somit existiert ein Lift $(\alpha * v * \alpha^{-1})^\sim \in \pi_1(\tilde{M})$, also ist $\pi_*((\alpha * v * \alpha^{-1})^\sim) = [\alpha * v * \alpha^{-1}] \in \pi_1(M)$, und folglich ist $H \trianglelefteq \pi_1(M)$ ein Normalteiler. ■

Mit diesem Lemma ist es schließlich möglich, genauere Informationen über die überlagerte Fundamentalgruppe zu gewinnen.

Satz 6.22: Sei M eine n -Mannigfaltigkeit, $\Gamma \subseteq \text{Diff}(M)$ eine Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich operiert und $H = p_*(\pi_1(M)) \subseteq \pi_1(M/\Gamma)$ die charakteristische Untergruppe. Dann ist

$$\Gamma \cong \pi_1(M/\Gamma)/H.$$

Insbesondere ist $\Gamma \cong \pi_1(M/\Gamma)$, falls M einfach zusammenhängend ist.

BEWEIS: Für ein $p \in M$ sei $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ fest, $g \in \Gamma$ und $\tilde{\alpha}$ ein Weg von \tilde{p} nach $g \cdot \tilde{p}$. Wir setzen

$$\Phi : \Gamma \rightarrow \pi_1(M/\Gamma)/H : \Phi(g) = [\alpha]H,$$

wo $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ sei.

Wohldefiniertheit: Ist β ein weiterer Weg von \tilde{p} nach $g \cdot \tilde{p}$, so ist $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1} =: \tilde{\nu}$ geschlossen, also $[\alpha] = \pi_*([\tilde{\nu}]) \cdot [\beta]$ und folglich $[\alpha]H = [\beta]H$, also ist Φ wohldefiniert.

Homomorphie: Für $g_1, g_2 \in \Gamma$ und entsprechende Wege $\tilde{\alpha}_i$ von \tilde{p} nach $g_i \cdot \tilde{p}$ folgt, dass $\tilde{\alpha}_1 * (g_1 \circ \tilde{\alpha}_2)$ ein Weg von \tilde{p} nach $g_1 g_2 \cdot \tilde{p}$ ist und weiter

$$\Phi(g_1 g_2) = [\alpha_1][\pi \circ g_1 \circ \tilde{\alpha}_2]H = [\alpha_1][\alpha_2]H = \Phi(g_1)\Phi(g_2).$$

Das heißt, Φ ist ein Homomorphismus.

Ist nun $[\alpha] = \pi_*([\tilde{\nu}])$, so ist wegen Lemma 6.13 $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\nu}$, also ist insbesondere $g \cdot \tilde{p} = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\nu}(1) = \tilde{p}$, und damit $g = 1$ (da Γ eigentlich diskontinuierlich und damit frei operiert). Das bedeutet, dass Φ injektiv ist.

Ist weiter $[\alpha]H \in \pi_1(M/\Gamma)/H$ und $\tilde{\alpha}$ ein Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}$, so existiert nach Definition von M/Γ ein $g \in \Gamma$ mit $g \cdot \tilde{p} = \tilde{\alpha}(1)$. Wir erhalten daraus, dass $\Phi(g) = [\alpha]H$ ist. Damit ist schließlich Φ surjektiv und somit ein Isomorphismus. ■

Für eine bestimmte Menge von Überlagerungen sind wir nun also in der Lage, die Fundamentalgruppe des Quotientenraumes zu bestimmen, nämlich genau für universelle Überlagerungen. Glücklicherweise reicht es aus, solche Überlagerungen zu betrachten, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

6.5 Universelle Überlagerungen

Der folgende Satz nimmt uns die Notwendigkeit ab, Überlagerungen zu betrachten, deren Fundamentalgruppe nicht trivial ist.

Satz 6.23: Jede Mannigfaltigkeit M hat eine universelle Überlagerung \tilde{M} , d.h. eine Überlagerung $\tilde{M} \rightarrow M$ mit $\pi_1(\tilde{M}) = (1)$.

BEWEIS: Wähle einen Basispunkt $p_0 \in M$. Definiere dazu die Menge \tilde{M} die Menge der Homotopieklassen $[\alpha]$ (mit Homotopie relativ $\{0, 1\}$), wobei α (nicht-geschlossene) Wege in M mit Aufpunkt p_0 seien. Definiere dann die Abbildung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M : \pi([\alpha]) = \alpha(1)$. Damit ist also $\pi^{-1}(q)$ die Menge der Homotopieklassen von Pfaden von p_0 nach q .

Nun benötigen wir auf \tilde{M} eine Topologie. Sei dazu α ein Weg mit Aufpunkt p_0 und U eine offene Umgebung des Endpunktes $q = \alpha(1)$. Sei dann $V(U, \alpha)$ die Menge

$$V(U, \alpha) = \{[\alpha * \beta] : \beta \text{ Pfad in } U, \beta(0) = \alpha(1)\}$$

Betrachte nun für α_1 und α_2 mit passenden Umgebungen U_1 und U_2 von den jeweiligen Endpunkten den Durchschnitt $D = V(U_1, \alpha_1) \cap V(U_2, \alpha_2)$. Ist dieser Durchschnitt nicht-leer, so sei $\alpha_3 \in D$, d.h. es existieren β_1 und β_2 , so dass $[\alpha_3] = [\alpha_1 * \beta_1]$ und $[\alpha_3] = [\alpha_2 * \beta_2]$ ist. Sei weiter $U_3 = U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von $\alpha_3(1)$, dann ist für jeden Pfad β_3 in U_3 mit Aufpunkt $\alpha_3(1)$ auch $[\alpha_3 * \beta_3] = [\alpha_1 * \beta_1 * \beta_2] = [\alpha_1 * (\beta_1 * \beta_2)] \in V(U_1, \alpha_1)$ und ebenso $[\alpha_3 * \beta_3] \in V(U_2, \alpha_2)$. Da die Klassen $[\alpha_3 * \beta_3]$ aber genau die Menge $V(U_3, \alpha_3)$ ausmachen, folgt

$$V(U_3, \alpha_3) \subseteq V(U_1, \alpha_1) \cap V(U_2, \alpha_2).$$

Aus diesem Grund kann die Menge *aller* $V(U, \alpha)$ als Basis einer Topologie auf \tilde{M} benutzt werden.

Mit dieser Topologie ist aber gerade $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ offen und stetig, da $\pi(V(U, \alpha))$ gerade die Wegzusammenhangskomponente von U ist, die $\pi(\alpha)$ enthält.

Es ist jetzt zu zeigen, dass π auch eine Überlagerung ist. Sei dazu $p \in M$ und U eine offene Umgebung von p , in der jeder geschlossene Pfad nullhomotop in M ist (also U eine einfach zusammenhängende Umgebung von p). Eine solche existiert gewiss stets, da M eine Mannigfaltigkeit ist und z.B. $\varphi^{-1}(B_r(p))$ eine solche Umgebung darstellt. Das Urbild $\pi^{-1}(U)$ enthält nun alle Klassen $[\alpha]$, wo $\alpha(1)$ in U liegt. Wir konstruieren eine Bijektion $U \times \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(U)$: Für ein $q \in U$ wähle Wege β_1 und β_2 von p nach q in U . Dann ist $\beta_1 * \beta_2^{-1}$ geschlossen in U , also sind $\beta_1 \simeq \beta_2$ homotop. Folglich sind auch $\alpha * \beta_1 \simeq \alpha * \beta_2$ homotop. Damit ist die Zuordnung $(q, [\alpha]) \mapsto [\alpha * \beta]$ jedenfalls wohldefiniert. Da U wegzusammenhängend ist, ist sie auch surjektiv. Aus folgendem Grund ist sie auch injektiv: Sei dazu $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$ mit Pfaden α_1, α_2 von p_0 nach p und mit Pfaden β_1 von p nach q_1 sowie β_2 von p nach q_2 . Dann ist sicher $q_1 = q_2$ und es ist wieder $\beta_1 * \beta_2^{-1}$ geschlossen in U , also $\beta_1 \simeq \beta_2$, also sind auch $\alpha_1 \simeq \alpha_2$. Die Topologie von \tilde{M} ist nun gerade so gewählt, dass die gezeigte Bijektion $U \times \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(U) : (y, [\alpha]) \mapsto [\alpha * \beta]$ ein Homöomorphismus ist, und damit ist π eine Überlagerung.

Es fehlt nun nur noch zu zeigen, dass \tilde{M} einfach zusammenhängend ist. Da $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung ist, ist \tilde{M} bereits lokal-wegzusammenhängend. Es ist \tilde{M} auch wegzusammenhängend, denn ist q in \tilde{M} gegeben, so wähle einen Weg α in M mit $[\alpha] = q$. Sei dann $\alpha_t : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ mit $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$. Für jedes $t \in [0, 1]$ wird also α nur noch von $\alpha(0)$ bis $\alpha(t)$ durchlaufen (und entsprechend langsamer). Damit ist α_t ein Weg in \tilde{M} von $[\alpha]$ nach $[c_{\alpha(0)}]$, also ist \tilde{M} auch wegzusammenhängend. Schließlich ist noch zu zeigen, dass jeder geschlossene Weg α in \tilde{M} nullhomotop ist. Da \tilde{M} wegzusammenhängend ist reicht es aus, geschlossene Wege mit Aufpunkt $[c_{p_0}]$ zu betrachten, sei also α ein solcher geschlossener Weg. Dann ist $\pi(\alpha)$ ein geschlossener Weg in (M, p) . Diesen Weg können wir liften auf $\beta \in \pi^{-1}(\pi(\alpha))$, so dass $\beta(0) = [c_{p_0}]$ ist, dann ist auch $\beta(1) = [c_{p_0}]$. Da der Endpunkt der Liftung β aber gleichzeitig auch die Klasse $[\pi(\alpha)]$ ist, ist also $\pi(\alpha)$ nullhomotop in M , also ist α nullhomotop in \tilde{M} . ■

Es reicht also, solche Überlagerungen zu betrachten, deren Fundamentalgruppen trivial sind. In diesem Fall berechnet sich auch die Fundamentalgruppe der überlagerten Mannigfaltigkeit sehr leicht:

$$\pi_1(M/\Gamma) \cong \Gamma.$$

Damit haben wir also unser Ziel erreicht: ein weiteres Werkzeug zur Erzeugung von Mannigfaltigkeiten, das uns gleichzeitig auch Informationen über die Fundamentalgruppe liefert.

6.6 Überlagerungen und Flächen

Da wir nun wissen, dass jede Mannigfaltigkeit eine universelle Überlagerung besitzt, trifft dies natürlich insbesondere auch auf die Flächen zu. Wir können also nun unsere Kenntnisse anwenden, um die Flächen auf eine weitere Weise zu charakterisieren.

Lemma 6.24: Sei $M = \mathbb{R}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}$, welches mit der Operation der Verschiebung eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann ist $M/\Gamma \cong S^1$ und somit auch $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

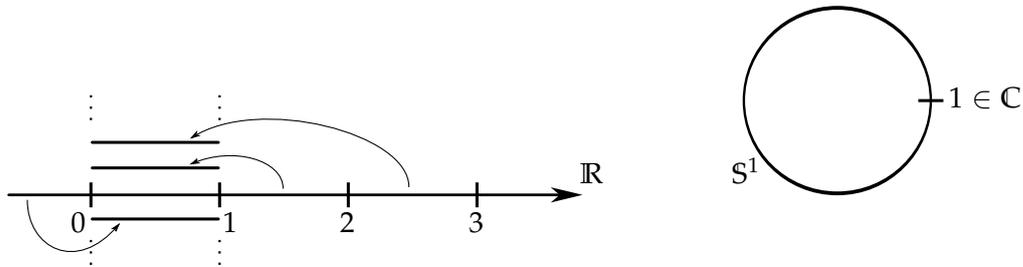
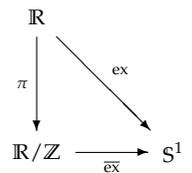


Abbildung 6.6: Schematische Darstellung der Operation $\Gamma = \mathbb{Z}$ auf \mathbb{R} durch Verschiebung. Jeder Abschnitt $[k, k + 1)$ wird äquivalent auf $[0, 1)$ verschoben. Die Randpunkte werden dabei identifiziert, das heißt, dass $0 \sim 1$ und generell $\dots r - 1 \sim r \sim r + 1 \sim r + 2 \dots$ gilt.

BEWEIS: Wir benutzen als Diffeomorphismus das von der Exponentialabbildung $\text{ex} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2i\pi t}$ induzierte $\bar{\text{ex}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, wobei S^1 identifiziert wird mit dem Einheitskreis in \mathbb{C} . Die Umkehrung ist durch den Hauptzweig des Logarithmus gegeben, was durch die Verschiebungsoperation von $\Gamma = \mathbb{Z}$ zu einer stetigen Funktion wird. ■



Aus dem vorangegangenen Lemma können wir noch eine weitere Mannigfaltigkeit erzeugen:

Lemma 6.25: Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, mit der Operation der Verschiebung ist dies eine eigentlich diskontinuierliche Operation. Dann ist $M/\Gamma = \mathbb{T}^2$.

BEWEIS: Dies folgt direkt aus Lemma 6.24, denn es ist $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. ■

Kapitel 6. Quotienten von Mannigfaltigkeiten

Die Sphäre S^2 ist bereits einfach zusammenhängend, so dass wir keine Überlagerung mehr finden müssen. Umgekehrt können wir jedoch S^2 als Dividend benutzen und eine eigentlich diskontinuierliche Operation suchen. Dazu müssten wir Untergruppen aus der Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}(S^2)$ auswählen und kontrollieren, dass die daraus erzeugte Operation eigentlich diskontinuierlich ist. An dieser Stelle werden wir mit einem weiteren Problem konfrontiert: Die Diffeomorphismengruppe der Sphäre ist eine riesige Gruppe. Jede kleine Verschiebung auf der Oberfläche der Sphäre fügt ein Element in diese Gruppe, die uns interessiert, hinzu. Daraus die „interessanten“, also eigentlich diskontinuierlich operierenden Untergruppen auszuwählen, ist schier unmöglich. Aus diesem Grund müssen wir uns erneut einschränken auf eine besondere Art von Diffeomorphismen: Anstatt die Sphäre S^2 „nur“ als glatte Mannigfaltigkeit zu betrachten, definieren wir eine *riemannsche Metrik* g auf ihr, wir wählen also eine Art Abstandsbegriff auf der Sphäre, und damit wird (S^2, g) zu einer *riemannschen Mannigfaltigkeit*³. Im Allgemeinen wird für die Sphäre die Metrik gewählt, die von der topologischen Einbettung $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ induziert wird, und diese Mannigfaltigkeit dann als *runde Sphäre* bezeichnet.

Damit haben wir aber auch automatisch eine Auswahl aus den Diffeomorphismen getroffen: Wir interessieren uns nur noch für solche Diffeomorphismen, die auch die Metrik respektieren, also solche, die Isometrien sind.

Betrachten wir also die Gruppe $SO(3)$ der Sphären-Isometrien: Jede Isometrie der runden Sphäre S^2 wird erzeugt von Rotationen um eine beliebig gewählte Achse durch den Ursprung und eine Spiegelung. Jede Rotation hat genau zwei Fixpunkte, so dass wir hiermit keine eigentlich diskontinuierliche Operation erzeugen können. Einzig die Spiegelung ist eine geeignete Operation. Daraus erhalten wir also $\Gamma = \{\text{id}, -\text{id}\}$. Bilden wir S^2/Γ , so erhalten wir

$$S^2/\Gamma = \mathbb{P}\mathbb{R}^2,$$

den zweidimensionalen projektiven Raum. Dieser ist nicht orientierbar, und somit nicht weiter für uns von Interesse. Trotzdem, seine Fundamentalgruppe kennen wir nun: $\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{R}^2) = (1, -1) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Auch die verbleibenden Mannigfaltigkeiten Σ_g für $g \geq 2$ erhalten wir als einen Quotienten aus einer riemannschen Mannigfaltigkeit und einer Untergruppe der Isometriengruppe.

Satz 6.26: *Für jedes $g \geq 2$, $g \in \mathbb{N}$, gibt es eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ der Isometriengruppe der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 , so dass gilt*

$$\Sigma_g = \mathbb{H}^2/\Gamma.$$

(Ohne Beweis.)

Auch hier können wir nicht genauer darauf eingehen, was der hyperbolische Raum und seine Isometriengruppe sind (siehe [1]).

Damit haben wir erneut alle Flächen gefunden und schließlich genügend Werkzeuge und Erfahrungen gesammelt, um uns *endlich* den dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten zuwenden zu können.

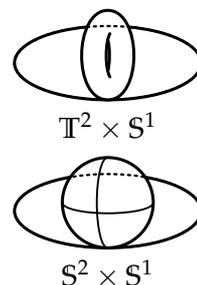
³Mehr zu riemannschen Mannigfaltigkeit in Kapitel 9 und in diversen Büchern und Skripten zu diesem Thema, z.B. [5].

7 Sphären, Tori und Summen der Dimension 3

Wir haben inzwischen einige Dinge gelernt über Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 und ihre Konstruktionsmöglichkeiten. Parallel zum Verlauf in Kapitel 5 können wir nun ausprobieren, wie weit wir mit den bisher gesammelten Techniken kommen. Dazu verschaffen wir uns zuerst einen Überblick über die Mannigfaltigkeiten, die wir bereits kennen und wenden darauf die Techniken an, die wir in den vorangegangenen Kapitel gelernt haben, also zusammenhängende Summen und Quotientenbildung. Die entstehenden Mannigfaltigkeiten werden wir auf ihre Fundamentalgruppe untersuchen und schließlich herausfinden, welche Menge von Mannigfaltigkeiten wir gefunden haben.

7.1 Einfache Mannigfaltigkeiten

- Die erste und eine der wichtigsten Mannigfaltigkeiten ist die bereits bekannte S^3 . Sie ist einfach zusammenhängend, hat also triviale Fundamentalgruppe $\pi_1(S^3) = (1)$.
- Eine weitere, ebenfalls bereits definierte Mannigfaltigkeit ist der Torus \mathbb{T}^3 , zu welchem sich die Fundamentalgruppe leicht aus der Definition $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ ergibt als $\pi_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$.
- Es gibt allerdings noch eine weitere Möglichkeit, einen „Torus“ zu bauen, nämlich als $S^2 \times S^1$, welcher im Folgenden $\mathbb{Y}_1 := S^2 \times S^1$ heißen soll¹. Wie man sieht, erhalten wir hier als Fundamentalgruppe $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$.



Benutzen wir also diese drei Mannigfaltigkeiten als Grundbausteine, so erhalten wir bereits viele neue Mannigfaltigkeiten. In Abschnitt 9.1 werden wir außerdem sehen, welche Bausteine noch verwendet werden können.

7.2 Summen einfacher Mannigfaltigkeiten und deren Unterscheidung

Bevor wir uns zusammenhängende Summe von 3-Mannigfaltigkeiten betrachten können, müssen wir sicherstellen, dass die Fundamentalgruppe korrekt verfolgt wird. Dazu müssen wir wissen, was $\pi_1(M \setminus \{\text{pt}\})$ ist für dreidimensionale M .

¹Das Zeichen \mathbb{Y} ist ein großes, griechisches Ypsilon. Es wurde gewählt als Nachfolger des griechischen Tau und wird *nicht allgemein* in diesem Zusammenhang benutzt.

Lemma 7.1: Sei M eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit und $\text{pt} \in M$ ein Punkt. Dann ist

$$\pi_1(M \setminus \{\text{pt}\}) = \pi_1(M).$$

BEWEIS: Sei dazu $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von pt , die diffeomorph zu \mathbb{B}^3 ist. Dann ist $M = (M \setminus \{\text{pt}\}) \cup U$, und U und $M \setminus \{\text{pt}\}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 4.5 von Seifert-van Kampen, wir erhalten also:

$$\pi_1(M) = \pi_1(M \setminus \{\text{pt}\}) * \pi_1(U) / \pi_1(\mathbb{B}^3 \setminus \{\text{pt}\}).$$

Nun ist U homotopieäquivalent zu \mathbb{B}^3 , also $\pi_1(U) = \pi_1(\mathbb{B}^3) = (1)$; und $\mathbb{B}^3 \setminus \{\text{pt}\}$ ist homotopieäquivalent zu \mathbb{S}^2 , also $\pi_1(\mathbb{B}^3 \setminus \{\text{pt}\}) = \pi_1(\mathbb{S}^2) = (1)$. Damit ergibt sich:

$$\pi_1(M) = \pi_1(M \setminus \{\text{pt}\}) * (1) / (1) = \pi_1(M \setminus \{\text{pt}\}). \quad \blacksquare$$

Die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 ist also *einfacher* als die zusammenhängende Summe in Dimension 2.

7.2.1 Tori

Im Wesentlichen verhalten sich der Torus und seine Summen in Dimension 3 wie die Cousins aus Dimension 2, mit dem angenehmen Unterschied, dass die Fundamentalgruppen einfacher sind.

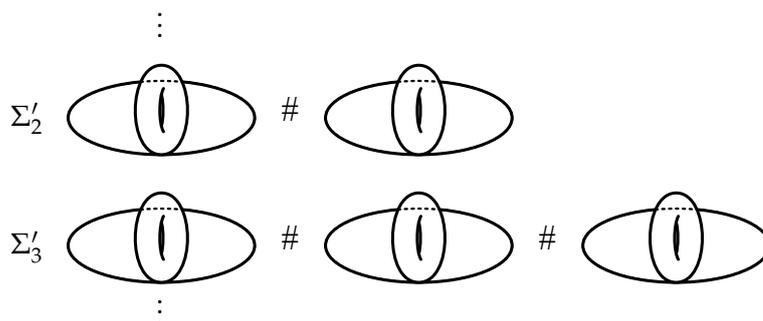


Abbildung 7.1: Zusammenhängende Summen verschiedener Tori ergeben eine Folge von einfachen 3-Mannigfaltigkeiten Σ'_g , die der Abfolge der Flächen aus Kapitel 5 ähnlich ist.

Wir erhalten also als Summen von Tori die Mannigfaltigkeiten $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$, $\mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3 \# \mathbb{T}^3$, ... Bezeichnen wir diese mit $\Sigma'_{g'}$, so berechnen sich deren Fundamentalgruppen als $\pi_1(\Sigma'_g) = (\mathbb{Z}^3)^{*g}$. Bezeichnen wir zusätzlich die Sphäre als $\Sigma'_0 := \mathbb{S}^3$ und den Torus als $\Sigma'_1 := \mathbb{T}^3$, so erhalten wir eine Sequenz von Mannigfaltigkeiten, die als nahe Verwandte der Flächen dastehen.

7.2. Summen einfacher Mannigfaltigkeiten und deren Unterscheidung

Lemma 7.2: Für $g \in \mathbb{N}$ hat die Mannigfaltigkeit Σ'_g die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\Sigma'_g) = (\mathbb{Z}^3)^{*g}$$

BEWEIS: Laut Definition von Σ'_g ist

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma'_g) &= \pi_1(\mathbb{T}^3 \# \dots \# \mathbb{T}^3) = \pi_1(\mathbb{T}^3) * \dots * \pi_1(\mathbb{T}^3) \\ &= \mathbb{Z}^3 * \dots * \mathbb{Z}^3 = (\mathbb{Z}^3)^{*g}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Ähnlich wie bei den Flächen, unterscheiden sich alle diese Mannigfaltigkeiten voneinander:

Lemma 7.3: Die Mannigfaltigkeiten Σ'_g für $g \in \mathbb{N}$ sind paarweise nicht diffeomorph.

BEWEIS: Seien $g, h \in \mathbb{N}$ mit $g \neq h$. Dann ist

$$\pi_1(\Sigma'_g)^{\text{ab}} = \mathbb{Z}^{3g} \not\cong \mathbb{Z}^{3h} = \pi_1(\Sigma'_h).$$

Folglich existiert kein Diffeomorphismus von Σ'_g nach Σ'_h . ■

7.2.2 Pseudotori

Im Gegensatz zu den Flächen existiert im Dreidimensionalen allerdings noch eine zweite Art Torus: Der Pseudotorus $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Auch hieraus lassen sich Summen bilden, $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{Y}_1 \# \mathbb{Y}_1$, oder allgemeiner $\mathbb{Y}_g = \mathbb{Y}_{g-1} \# \mathbb{Y}_1$. Die Fundamentalgruppen dieser Pseudotori sind ebenfalls sehr leicht zu berechnen als $\pi_1(\mathbb{Y}_g) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{*g}$. Ganz analog zum vorherigen Fall erhalten wir eine Sequenz von Tori mit Anfangselement $\mathbb{Y}_0 := \mathbb{S}^3$, die sich alle voneinander unterscheiden.

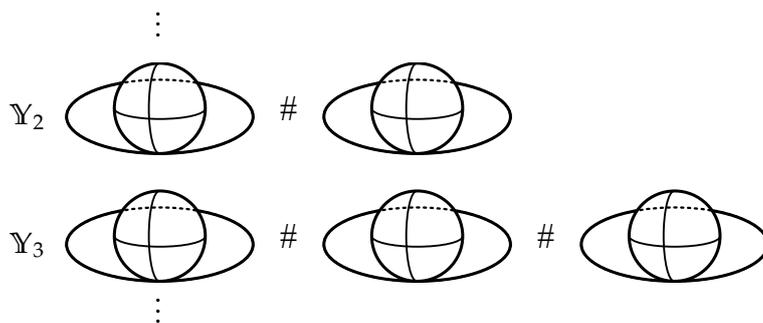


Abbildung 7.2: Auch der Pseudotorus \mathbb{Y} ergibt durch zusammenhängende Summen eine Abfolge \mathbb{Y}_i , die den Flächen sehr ähnlich ist.

Lemma 7.4: Mit $g \in \mathbb{N}$ hat die Mannigfaltigkeit \mathbb{Y}_g die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\mathbb{Y}_g) = \mathbb{Z}^{*g}$$

BEWEIS: Laut Definition von \mathbb{Y}_g ist

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{Y}_g) &= \pi_1((\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \# \dots \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)) \\ &= \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) * \dots * \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \\ &= \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{*g} \end{aligned}$$

■

Komplett analog zu unseren Beobachtungen für reguläre Tori erhalten wir eine Folge von Mannigfaltigkeiten, die alle unterschiedlich sind:

Lemma 7.5: Die Mannigfaltigkeiten \mathbb{Y}_g für $g \in \mathbb{N}$ sind paarweise nicht diffeomorph.

BEWEIS: Seien $g, h \in \mathbb{N}$ mit $g \neq h$. Dann ist

$$\pi_1(\mathbb{Y}_g)^{\text{ab}} = (\mathbb{Z}^{*g})^{\text{ab}} = \mathbb{Z}^g \not\cong \mathbb{Z}^h = (\mathbb{Z}^{*h})^{\text{ab}} = \pi_1(\Sigma'_h).$$

Folglich existiert kein Diffeomorphismus von Σ'_g nach Σ'_h .

■

Nun haben wir also eine weitere Möglichkeit gefunden, die Abfolge der zweidimensionalen Tori zu verallgemeinern.

7.2.3 Mischungen

Wie man an den vorangegangenen zwei Abschnitten sieht, existieren zwei gleichwertige Möglichkeiten, Analogien zu den Flächen herzustellen. Keine der beiden Möglichkeiten hat irgendwelche Vorzüge oder Nachteile, so dass nicht klar ist, welches die „bessere“ Wahl sein könnte. Zwar werden in der Literatur hauptsächlich \mathbb{T}^3 benutzt, allerdings sollte dies kein ernsthaftes Kriterium darstellen.

Was aber passiert, wenn wir die beiden Arten vermischen? Also Mannigfaltigkeiten herstellen der Form $\Sigma_g \# \mathbb{Y}_h$?

Lemma 7.6: Eine Mannigfaltigkeit der Form $\Sigma_g \# \mathbb{Y}_h$, für $g, h \in \mathbb{N}$ hat Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\Sigma_g \# \mathbb{Y}_h) = \pi_1(\Sigma_g) * \pi_1(\mathbb{Y}_h) = (\mathbb{Z}^3)^{*g} * \mathbb{Z}^{*h}.$$

BEWEIS: Folgt direkt aus Lemma 7.2 und Lemma 7.4.

■

Nun sieht man, dass es schwieriger wird, die Gruppen zu unterscheiden.

7.2.4 Unterscheidung

Vergleichen wir als ein erstes Beispiel die beiden Mannigfaltigkeiten $\mathbb{T}^3 = \Sigma'_1$ und \mathbb{Y}_3 . Die Fundamentalgruppen sind hierbei

$$\pi_1(\Sigma'_1) = \mathbb{Z}^3 \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{Y}_3) = \mathbb{Z}^{*3}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht klar, ob sich diese Gruppen unterscheiden oder nicht. Bei näherer Betrachtung stellt sich aber heraus, dass \mathbb{Z}^3 abelsch ist, während \mathbb{Z}^{*3} nicht abelsch ist. In diesem Fall haben wir also ein leichtes Kriterium gefunden, um die Gruppen zu unterscheiden, welches sich allerdings leicht in einem weiteren Beispiel ausbügeln lässt: Wir möchten nun wissen, ob die Mannigfaltigkeiten $\Sigma'_1 \# \mathbb{Y}_3$ und \mathbb{Y}_6 sich unterscheiden. Die Fundamentalgruppen kennen wir bereits:

$$\pi_1(\Sigma'_1 \# \mathbb{Y}_3) = \mathbb{Z}^3 * \mathbb{Z}^{*3} \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{Y}_6) = \mathbb{Z}^{*6}.$$

In diesem Fall können wir die einfache Unterscheidung von oben nicht benutzen, da sowohl $\mathbb{Z}^3 * \mathbb{Z}^{*3}$ als auch \mathbb{Z}^{*6} nicht abelsch sind. Auch deren Abelianisierung, die sich bei beiden als \mathbb{Z}^6 ergibt, hilft uns nicht weiter – die Frage, ob die Fundamentalgruppen sich unterscheiden, muss für diese Arbeit offen bleiben.

7.2.5 Die einfachen Mannigfaltigkeiten

Wir haben also zwei unterschiedliche Möglichkeiten gefunden, die Flächen aus Kapitel 5 zu verallgemeinern. Auf der einen Seite steht die Abfolge der Mannigfaltigkeiten Σ'_n , die gebildet werden aus dem Standardtorus $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \# \mathbb{S}^1 \# \mathbb{S}^1$; auf der anderen Seite steht die Abfolge der Mannigfaltigkeiten \mathbb{Y}_n , die gebildet werden aus dem Pseudotorus $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$; und schließlich existieren noch Mischungen dieser beiden Möglichkeiten. Insgesamt ergibt sich ein „Feld“ von möglichen Mannigfaltigkeiten, wobei aber nicht klar ist, welche dieser Mannigfaltigkeiten möglicherweise diffeomorph sind, da manche der Fundamentalgruppen so schwierig auseinander zu halten sind, dass wir dies hier nicht durchführen können.

Die Möglichkeiten der Summenbildung aus den uns bekannten, einfachen Mannigfaltigkeiten sind damit erschöpft, und wir müssen uns erneut die unbequeme Frage stellen, ob wir bereits alle Mannigfaltigkeiten erfasst haben. Im Gegensatz zu den Flächen stellt sich jedoch heraus, dass dies nicht der Fall ist, sondern wir erst einen kleinen Bruchteil der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten betrachtet haben.

7.3 Quotienten

Bis hier haben wir uns darauf beschränkt, nur solche Mannigfaltigkeiten als Bausteine für zusammenhängende Summen zu benutzen, die wir schon kannten. Da wir aus Kapitel 6 wissen, wie wir aus einer bekannten (einfach zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit neue, unbekannte Quotienten herstellen können, können wir also auch diese

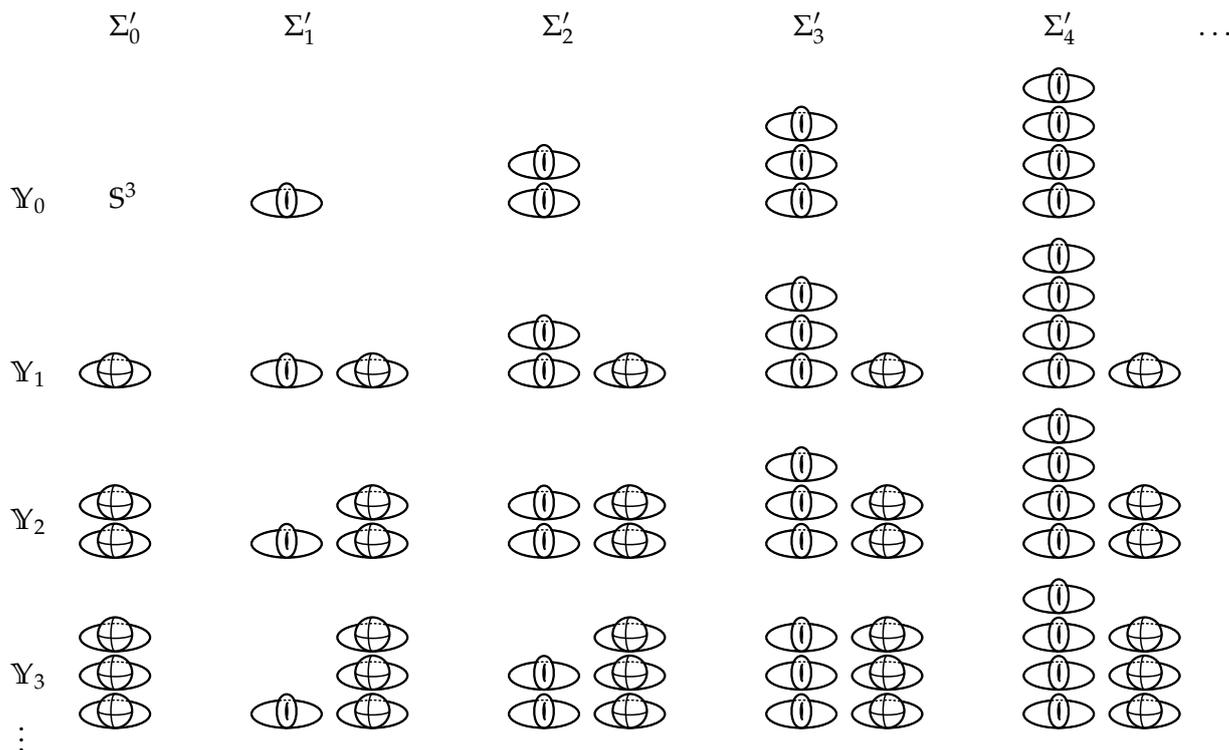


Abbildung 7.3: Das „Feld“ der bisher erzeugten nicht-diffeomorphen zusammenhängenden Summen von Mannigfaltigkeiten. Gezeigt sind nur die primen Summanden, aus denen die einzelnen Mannigfaltigkeiten zusammengesetzt werden.

als Bausteine benutzen. Welche genau hierfür notwendig sind, werden wir in Kapitel 9 betrachten.

Der Prozess, mit dem wir bisher Mannigfaltigkeiten „herstellen“ können, ist also der folgende:

- Starte mit einer Sammlung einfach zusammenhängender riemannschen Mannigfaltigkeit \tilde{M}_i für $i \in I$ für eine endliche Indexmenge I .
- Suche eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Isom}(M)$, die eigentlich diskontinuierlich operiert und bilde $M_i = \tilde{M}_i/\Gamma$.
- Bilde die zusammenhängende Summe

$$M = \#_{i \in I} M_i$$

und erhalte eine Mannigfaltigkeit M .

Umgekehrt funktioniert der Prozess natürlich ebenso: Ausgehend von einer Mannigfaltigkeit M können wir die Primzerlegung M_1, M_2, \dots bilden und für jedes M_i die universelle Überlagerung \tilde{M}_i suchen.

An den obigen Ausführungen dieses Prozesses mit nur den drei Bausteinen S^3 , T^3 und Y hat sich gezeigt, dass eine detaillierte Auflistung aller möglichen Kombinationen von Summen sehr mühsam, zum Teil sogar unmöglich ist. Aus diesem Grund müssen wir uns darauf beschränken, die *Bausteine* und die *Methoden* zu klassifizieren.

Dieses Ziel haben wir insofern erreicht, dass der dargestellte Prozess unser gesamtes bisheriges Wissen über 3-Mannigfaltigkeiten enthält. Nun stellen sich zwei Fragen: Müssen wir uns überhaupt mit Quotienten von Mannigfaltigkeiten beschäftigen, um *noch* mehr Bausteine zu erzeugen, insbesondere angesichts der großen Menge von Mannigfaltigkeiten, die wir schon in unserem „Feld“ gefunden haben, und haben wir bereits *alle* 3-Mannigfaltigkeiten erreicht?

7.3.1 Beispiel: Linsenräume

Zur Beantwortung der ersten Frage betrachten wir die runde Sphäre S^3 und ihre Isometriegruppe $SO(4)$. Diese Gruppe ist, als Untergruppe der Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}(S^3)$, bereits so groß, dass wir daraus Untergruppen herausnehmen können, die eigentlich diskontinuierlich operieren, um neue Mannigfaltigkeiten zu erzeugen.

Für gewählte $p, q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq q - 1$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$ erhält man beispielsweise eine Gruppe Γ von Operationen, welche durch die Abbildung

$$\omega : (z_1, z_2) \mapsto \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\right) z_1, \exp\left(\frac{2p\pi i}{q}\right) z_2 \right)$$

erzeugt werden, wobei hierfür die S^3 als die Einheitskugel in \mathbb{C}^2 betrachtet wird; $\Gamma = \{1, \omega, \omega^2, \dots\}$ ist dann isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Es ist einfach zu sehen, dass diese Gruppe eigentlich diskontinuierlich operiert, und somit ist

$$L(p, q) = S^3 / \Gamma$$

eine Mannigfaltigkeit, der sogenannte *Linsenraum* zu den Parametern p und q . Die Gruppe der Operationen Γ , mit der wir es hier zu tun haben, ist aber zyklisch und endlich, es ist nämlich $\Gamma \sim \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (für jedes $p \in \mathbb{Z}$). Das heißt, wir haben eine Mannigfaltigkeit mit endlicher, nichttrivialer Fundamentalgruppe gefunden, sogar (mindestens) für jedes $q \in \mathbb{N}$ eine unterschiedliche. Da wir bisher nur Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe gefunden hatten, wissen wir, dass diese neu gefundenen Linsenräume *nicht* in unser bisheriges Schema passen.

Man kann zeigen, dass für die Parameter folgende Aussage gilt:

Satz 7.7: Seien $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p \leq q - 1$, $\text{ggT}(p, q) = 1$, $1 \leq p' \leq q' - 1$ und $\text{ggT}(p', q') = 1$, so dass die Linsenräume $L(p, q)$ und $L(p', q')$ definiert sind. Dann gilt

$$L(p, q) \cong L(p', q') \iff q' = q \text{ und } p' = \pm p^{\pm 1}$$

(wobei $p, p' \in \mathbb{Z}_q$ aufgefasst werden).

(Ohne Beweis. Siehe [11].)

Wir wissen jetzt also, welche Kombinationen von Parametern zu welchen Linsenräumen führen und können Linsenräume bekannter Parameter stets auseinander halten. Aber wir haben außerdem ein Beispiel gefunden für Mannigfaltigkeiten, die zwar gleiche Fundamentalgruppe tragen aber nicht diffeomorph sind. So sind zum Beispiel $L(1,5)$ und $L(2,5)$ nicht diffeomorph, aber die Fundamentalgruppe ist für beide \mathbb{Z}_5 .

7.3.2 Ausblick

Haben wir *jetzt* alle dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten gefunden? Leider immer noch nicht.

Bevor wir jedoch zu einer (möglicherweise) vollständigen Klassifikation kommen können, benötigen wir noch ein letztes Werkzeug, um Mannigfaltigkeiten herzustellen und wieder zu zerlegen: die Torusdekomposition.

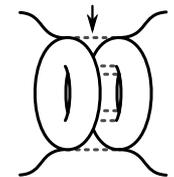
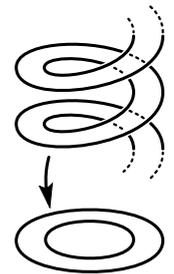
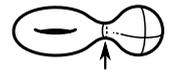
Sie wird im folgenden Kapitel dargestellt.

8 Zusammenhängende Summen entlang eingebetteter Tori

Das letzte Werkzeug das wir benötigen bevor wir das Thurstonprogramm formulieren können ist die zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten entlang eingebetteter Tori, welche von Johannson und Jaco-Shalen definiert wurde. Die Technik ist hierbei die gleiche wie bei der zusammenhängenden Summe entlang Sphären: Aus zwei Mannigfaltigkeiten wird jeweils eine Untermannigfaltigkeit entfernt und die entstehenden Ränder miteinander identifiziert. Die dabei entstehenden Mannigfaltigkeiten sind jedoch wesentlich vielfältiger als bei der bekannten zusammenhängenden Summe. Und auch die Fundamentalgruppe ist wesentlich schwieriger zu berechnen, weshalb wir uns hier darauf beschränken müssen, nur das Verfahren und dessen Möglichkeiten anzugeben.

Ebenso wie bei der zusammenhängenden Summe entlang Sphären wird auch in diesem Kapitel ein Prozess beschrieben, der die Summe wieder auflöst und aus einer Mannigfaltigkeit zwei oder mehrere Bausteine macht, die als Summanden dienen können.

Prinzipiell könnte das Verfahren der zusammenhängenden Summe entlang beliebiger Untermannigfaltigkeiten durchgeführt werden. Es zeigt sich jedoch, dass der Aufwand, den dies bedeuten würde, weitgehend unnötig ist, da bereits durch die beiden vorgestellten Summen-Methoden alle Mannigfaltigkeiten konstruiert werden können. Somit haben wir nach Abschluss dieses Kapitels alle notwendigen Techniken untersucht, um im folgenden Kapitel über das Thurstonprogramm eine Klassifizierung aller 3-Mannigfaltigkeiten aufzustellen.



8.1 Zusammenhängende Summe entlang Tori

Die Definition der zusammenhängenden Summe entlang zweier Tori sieht fast genau so aus wie die der zusammenhängenden Summe entlang zweier Sphären:

Definition 8.1: Ein *Volltorus* der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{V}^n = \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1.$$

Der Rand des Volltorus entspricht genau dem Torus einer Dimension niedriger:

$$\partial \mathbb{V}^n = \mathbb{T}^{n-1}.$$

Damit haben wir das hier benötigte äquivalent zu den Sphären in der Hand und können diese als verbindendes Element benutzen:

Definition 8.2: Seien M_1 und M_2 zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$. Es seien $V_i \subseteq M_i$ ($i = 1, 2$) eingebettete Volltori, das heißt, $\psi_i : \mathbb{V}^n \rightarrow V_i$ seien Diffeomorphismen ($i = 1, 2$). Weiter bezeichne $T_i = \partial V_i = \psi_i(\partial \mathbb{V}^n)$ die Ränder der eingebetteten Tori. Dann heißt

$$M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2 = (M_1 \setminus \mathring{T}_1) + (M_2 \setminus \mathring{T}_2) / \sim$$

die zusammenhängende Summe *entlang der Tori* V_1 und V_2 .

Unsere Anschauung des Prozesses kann von der zusammenhängenden Summe aus Kapitel 4 übernommen werden: eine Mannigfaltigkeit wird entlang eines Torus aufgetrennt und mit einer zweiten, die ebenfalls entlang eines eingebetteten Torus aufgetrennt wurde, an den Schnittstellen verklebt. Im Gegensatz zu der Verbindung entlang Sphären hängt jedoch hier die entstehende Mannigfaltigkeit von der Wahl der Einbettung ab; während es im Wesentlichen eine einzige eingebettete Sphäre gibt (da jede zwei Sphären durch eine Isotopie ineinander überführt werden können), gibt es im Allgemeinen verschiedene, nicht-isotope Einbettungen des Volltorus in einer Mannigfaltigkeit (ein Beispiel werden wir in 8.1.1 sehen).

Es ist schwierig, von diesem Prozess ein Diagramm zu erstellen, denn die zusammenhängende Summe entlang Tori benötigt Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$. Dies rührt daher, dass der kleinste Torus \mathbb{T}^2 von Dimension 2 ist, während die kleinste Sphäre S^1 nur Dimension 1 hat. Wir müssen hierfür also leider auf eine korrekte Darstellung verzichten.

Auch das Vorgehen ist ähnlich wie im einfacheren Fall:

Lemma 8.3: *Die zusammenhängende Summe zweier Mannigfaltigkeiten entlang zweier Tori ist selbst wieder eine Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Analog zum Beweis von 4.2. ■

Und auch die Kommutativität bleibt erhalten.

Lemma 8.4: *Die Verknüpfung $\#_{\psi_1, \psi_2}$ ist kommutativ, d.h. es ist*

$$M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2 \cong M_2 \#_{\psi_2, \psi_1} M_1.$$

(Ohne Beweis.)

Es bleibt schließlich noch, die Fundamentalgruppe der neu gebauten Mannigfaltigkeit zu bestimmen. Dies ermöglicht uns wieder der Satz von Seifert-van Kampen, wobei diesmal die Schnittmenge zwischen den beiden Mengen eine Mannigfaltigkeit Z , die homotopieäquivalent zu \mathbb{T}^n ist, sein wird.

Formal betrachtet man dazu $M_1 \setminus \mathring{T}_1$ als homotopieäquivalent zu einem U und $M_2 \setminus \mathring{T}_2$ als homotopieäquivalent zu einem V , so dass $U \cap V$ homotopieäquivalent zu \mathbb{T}^{n-1} ist. Dann ergibt sich die Fundamentalgruppe aus dem Satz von Seifert-van Kampen wie folgt:

8.1. Zusammenhängende Summe entlang Tori

Satz 8.5: Für zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 und $\psi_i : \mathbb{V}^n \rightarrow T_i \subseteq M_i$ diffeomorphe Einbettungen sowie deren Ränder $T_i = \partial V_i$ (wie oben) ist

$$\pi_1(M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2) = \pi_1(M_1 \setminus \mathring{T}_1) * \pi_1(M_2 \setminus \mathring{T}_2) / \mathbb{Z}^{n-1}.$$

(Ohne Beweis.)

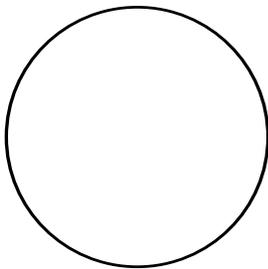
Wir müssen also immer noch die Fundamentalgruppen von M_1 und M_2 ohne die herausgeschnittenen Volltorus-Einbettungen kennen, um die Fundamentalgruppe der Verbindung bestimmen zu können, und die Bestimmung wird, anders als für zusammenhängende Summen entlang Sphären auch nicht leichter mit höherer Dimension.

Wir können tatsächlich noch nicht einmal sicher sein, dass \mathbb{Z}^2 als Untergruppe von $\pi_1(M)$ auftauchen wird. So gibt es beispielsweise die Möglichkeit, die Sphäre S^3 als Summe entlang zweier Volltori zu schreiben. In diesem Fall ist die Summe der beiden Volltori sogar einfach zusammenhängend, also $\pi_1(S^3) = (1)$.

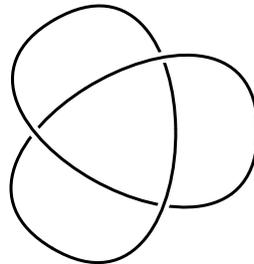
8.1.1 Ein Beispiel: Knoten

Mit der zusammenhängenden Summe entlang Tori ist es uns bereits möglich, 3-Mannigfaltigkeiten fast beliebig komplizierter Fundamentalgruppe zu bauen.

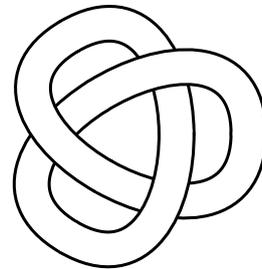
Seien dafür K_1 und K_2 zwei glatte Knoten, also zwei diffeomorphe Einbettungen von S^1 in S^3 . Knoten können mehr oder weniger beliebig kompliziert sein, so sehr dass die Knotentheorie ein eigenes Teilgebiet der Topologie ist. Durch „Verdicken“ eines Knotens K zu $V_K = \{x \in S^3 : d(x, K) \leq \varepsilon\}$ für ein genügend klein gewähltes $\varepsilon > 0$, erhält man einen eingebetteten Volltorus V_K , der als „Seele“ gerade K enthält (siehe auch Abbildung 8.1).



(a) Die S^1 ist der Ausgangspunkt eines jeden Knotens. Ein Knoten ist eine Einbettung der S^1 in die S^3 .



(b) Ein einfacher Knoten, der Kleeblattknoten.



(c) Der „verdickte“ Kleeblattknoten ist ein verschlungener Torus.

Abbildung 8.1: Die „Verdickung“ eines Knotens zu einem Torus. Während die Fundamentalgruppe des Knoten selbst einfach zu bestimmen ist (es ist ja gerade $\Psi : \mathbb{T}^n \rightarrow K$ ein Diffeomorphismus als Definition des Knotens gewählt), ist bereits in diesem einfachen Beispiel die Fundamentalgruppe des Komplements nur sehr schwer zu bestimmen.

Erzeugt man diese Volltori aus K_1 und K_2 erhält man also zwei Mannigfaltigkeiten $M_1 = S^3$ und $M_2 = S^3$ mit jeweils einem eingebetteten Torus $V_{K_1} \subseteq M_1$ und $V_{K_2} \subseteq M_2$. Die Fundamentalgruppen $\pi_1(M_i \setminus \mathring{T}_{K_i})$ hängen natürlich von K_i ab und können somit ebenfalls sehr kompliziert sein¹. Wir haben aber jetzt alle Voraussetzungen geschaffen die notwendig sind, um eine zusammenhängende Summe entlang Tori zu erzeugen, also ist

$$M := M_1 \#_{\psi_1, \psi_2} M_2,$$

wobei $\psi_i : \mathbb{V}^{n-1} \rightarrow V_{K_i}$ die Einbettungen darstellen.

Die Fundamentalgruppe dieser Mannigfaltigkeit berechnet sich, wie wir wissen, zu Folgendem:

$$\pi_1(M) = \pi_1(S^3 \setminus \mathring{T}_{K_1}) * \pi_1(S^3 \setminus \mathring{T}_{K_2}) / \mathbb{Z}^2.$$

Wir haben also *durch geschicktes Verbinden* aus zwei sehr einfachen Mannigfaltigkeiten, aus zwei Kopien des S^3 , eine Mannigfaltigkeit gemacht, deren Fundamentalgruppe enorm kompliziert sein kann. Ein beeindruckenderes Beispiel der Möglichkeiten, die die zusammenhängende Summe entlang Tori eröffnet, kann man sich kaum vorstellen. Tatsächlich kann man zeigen, dass *jede* geschlossene 3-Mannigfaltigkeit als zusammenhängende Summe entlang Tori darstellbar ist [6].

8.2 Dekomposition

Ebenso wichtig wie das Zusammenfügen von Mannigfaltigkeiten wäre auch hier eine Dekomposition in Teile, die (hoffentlich) im Wesentlichen eindeutig sind.

Das analog zum Begriff „prim“ für zusammenhängende Summen ist hier „atoroidal“. Leider benötigen wir für dessen Definition noch einen weiteren Begriff:

Definition 8.6: Sei M eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die nicht die Sphäre S^3 ist und S eine eingebettete Fläche in M . Die Fläche S heißt *inkompressibel*, wenn für jede glatt eingebettete Kreisscheibe $B \subseteq M$ mit $B \cap S = \partial B$ gilt, dass ∂B auch Rand einer Kreisscheibe $B' \subseteq S$ ist, die eingebettet in S ist, also $\partial B = \partial B'$.

Eine eingebettete Fläche heißt entsprechend *kompressibel*, wenn sie nicht inkompressibel ist, das heißt, wenn es eine Kreisscheibe $B \subseteq M$ gibt mit $B \cap S = \partial B$, so dass keine Kreisscheibe $B' \subseteq S$ existiert für die $\partial B = \partial B'$ ist.

Es sind also solche Flächen S inkompressibel, für die folgende Eigenschaft gilt: Kann ein eingebetteter Kreis $S^1 \rightarrow S$ nicht „ausgefüllt“ werden, ist also nicht Rand einer Scheibe $\mathbb{B} \rightarrow S$, so gilt dies auch in M , es gibt also keine Scheibe $\mathbb{B} \rightarrow M$, deren Rand der genannte Kreis ist.

Es fehlt eigentlich noch ein letzter Begriff, der für die folgende Definition notwendig ist, nämlich „randparallel“. Da dieser Begriff aber nur für berandete Mannigfaltigkeiten etwas bedeutet, können wir an dieser Stelle darauf verzichten.

¹Tatsächlich ist die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements die erste nicht-triviale Invariante eines Knotens. Das heißt, für einen geeignet gewählten Isomorphiebegriff gilt: Ist $K_1 \cong K_2$ so folgt, dass $\pi_1(K_1^c) \cong \pi_1(K_2^c)$ ist.

Definition 8.7: Eine Mannigfaltigkeit M heißt *atoroidal*, wenn M keinen eingebetteten, (nicht-randparallelen) inkompressiblen Torus enthält.

Nun benötigen wir noch einen Vorgang, analog zu 4.7, durch den M entlang einer Menge von Tori zerlegt wird:

Definition 8.8: Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und T eine Menge von eingebetteten Tori der Dimension $n - 1$. Dann erhalten wir durch *Chirurgie entlang T* , das heißt, durch Entfernen einer kleinen zylindrischen Umgebung $\tilde{T} \cong T \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ (falls eine solche existiert) von T mehrere Teile, welche berandete Mannigfaltigkeiten sind. Der Prozess wird mit $M|T$ beschrieben.

Damit haben wir schließlich alle notwendigen Begriffe gesammelt, um das folgende Resultat zu erklären:

Satz 8.9: *Zu einer kompakten, primen 3-Mannigfaltigkeit M existiert eine Menge $T \subseteq M$ von disjunkten, inkompressiblen eingebetteten Tori, so dass jede Komponente von $M|T$ entweder atoroidal oder eine sog. Seifert-Mannigfaltigkeit ist. Eine minimale Menge T mit dieser Eigenschaft ist eindeutig bestimmt bis auf Isotopie.*

Seifert-Mannigfaltigkeiten sind solche Mannigfaltigkeiten, die auf eine bestimmte Art eine Blätterung besitzen. Es soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

(Ohne Beweis. Für einen Beweis siehe [3, Chapter 1.2].)

Die entstehenden Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten mit Rändern, die Ränder sind nämlich gerade die Stellen, an denen ein Torus entfernt wurde. Diesen Defekt kann man beheben, indem die Schnittstellen mit Volltori aufgefüllt werden. Man erhält dann die ursprüngliche Mannigfaltigkeit wieder als zusammenhängende Summe $M_1 \# \dots \# M_k$ von geschlossenen Mannigfaltigkeiten M_i entlang von Tori. Im Allgemeinen behalten die Stücke jedoch ihren Rand.

Damit haben wir auch für die Zerlegung entlang Tori ein ähnliches Ergebnis wie für die Zerlegung entlang Sphären: Die Schnittstellen sind (fast) eindeutig bestimmt, damit auch die entstehenden Komponenten, und jede der Komponenten ist auf eine Art beherrschbar.

Schließlich haben wir so auch das dritte und letzte Werkzeug in unseren Werkzeugkasten eingefügt, mit dem wir dreidimensionale Mannigfaltigkeiten bauen und zerlegen können.

9 Das Thurstonprogramm

Mit Hilfe der vorangegangenen Arbeit sind wir nun in der Lage, die Thurston-Vermutung endlich zu präzisieren:

Theorem 9.1 (Thurston'sche Geometrisierungsvermutung): *Ist M eine prime Mannigfaltigkeit der Dimension 3, so gilt für jede Komponente M_i der Toruszerlegung von M , dass es genau eine der acht Modellgeometrien X_i und eine Untergruppe $\Gamma_i \subseteq \text{Isom}(X_i)$, so dass $\tilde{M}_i = X_i/\Gamma_i$ ist.*

Oder, mit anderen Worten: Jede Komponente der Toruszerlegung einer primen Mannigfaltigkeiten ist *geometrisierbar*.

Umgekehrt erhalten wir aber auch einen „Algorithmus“, um jede existierende 3-Mannigfaltigkeit bauen zu können, wobei in jedem Schritt (im Prinzip) die Fundamentalgruppe berechenbar ist:

1. Wähle eine Modellgeometrie X_i . Die Fundamentalgruppe von X_i ist bekannt, $\pi_1(X_i) = (1)$.
2. Wähle eine Untergruppe $\Gamma_i \subseteq \text{Isom}(X_i)$, so dass Γ_i diskret ist und eigentlich diskontinuierlich auf X_i operiert.
3. Berechne $\tilde{M}_i = X_i/\Gamma_i$. Die Fundamentalgruppe ist $\pi_1(\tilde{M}_i) \cong \Gamma_i$.
4. Falls \tilde{M}_i nicht kompakt ist, so kompaktifiziere mögliche „Torus-Enden“ $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ mit Tori $T_i^{(k)}$ und erhalte

$$M_i = X_i/\Gamma_i \dot{\cup}_k T_i^{(k)}$$

mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(M_i) = \Gamma_i$.

5. Verklebe die M_i ($i = 1, \dots, n$) entlang ihrer Torusränder zu

$$N_k = M_1 \# \dots \# M_n$$

so dass N_k keinen Rand mehr hat. Die Fundamentalgruppe ist im Prinzip berechenbar mit 8.5 als $\pi_1(M_1 \# M_2) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) / \mathbb{Z}^2$.

6. Bilde aus den N_k für $k = 1, \dots, m$ die zusammenhängende Summe und erhalte

$$N = N_1 \# \dots \# N_m$$

mit Fundamentalgruppe $\pi_1(N) = \pi_1(N_1) * \dots * \pi_1(N_m)$.

Die Geometrisierungsvermutung beinhaltet also, dass durch den dargestellten Prozess tatsächlich *alle* existierenden 3-Mannigfaltigkeiten hergestellt werden.

Dieses Ergebnis ist mehr als erstaunlich; es enthält mehrere andere benannte Ergebnisse als Spezialfälle. Beispielsweise besagt die Poincaré-Vermutung, dass eine (kompakte, randlose, orientierbare) 3-Mannigfaltigkeit genau dann triviale Fundamentalgruppe hat, wenn sie die Sphäre S^3 ist. Das heißt, in der Sprache unseres Algorithmus „terminiert“ die Poincaré-Vermutung bereits nach dem ersten Schritt: Wir wählen nur eine einzige Modellgeometrie und wenden keinen der weiteren Schritte an. Auch die Hyperbolisierungsvermutung und die Elliptisierungsvermutung sind auf ähnliche Weise Spezialfälle der Geometrisierungsvermutung: stets wird auf eine Menge von Geometrien und Werkzeugen eingeschränkt, so dass der Algorithmus nicht komplett durchlaufen wird, sondern nur Teile benutzt werden.

Mit dem Beweis des Theorems 2003 durch Grisha Perelman [10] wurde also unter anderem gleichzeitig die seit 1904 offene Poincaré-Vermutung bewiesen. Sie war eines der sieben „Millennium Problems“, auf deren Lösung die Clay Mathematical Foundation eine Million US-Dollar ausgesetzt hatte – und ist das bisher einzige der sieben Probleme, das gelöst werden konnte.

9.1 Die Modellgeometrien

Die Modellgeometrien selbst sind nichts Anderes als bestimmte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, also solche Mannigfaltigkeiten, die eine Riemannsche Metrik tragen. Diese Metrik definiert dabei Abstände und Winkel auf der Mannigfaltigkeit, erzeugt also genau eine *Geometrie* auf der Mannigfaltigkeit.

Wie sich herausstellte, sind für die Erfüllung der Thurstonvermutung gerade einmal *acht* Geometrien notwendig.

- Der euklidische Raum \mathbb{R}^3 mit der flachen Metrik.
- Die runde Sphäre S^3 mit der runden Metrik.
- Den hyperbolischen Raum \mathbb{H}^3 mit der hyperbolischen Metrik.
- Die Produktmannigfaltigkeit $S^2 \times \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik.
- Die Produktmannigfaltigkeit $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ mit der induzierten Metrik.
- *Nil*
- *Sol*
- $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$, die universelle Überlagerung der speziellen linearen Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$.

Dabei stellen die ersten drei genannten Geometrien (\mathbb{R}^3 , S^3 und \mathbb{H}^3) solche mit konstanter Schnittkrümmung dar; die folgenden zwei ($S^2 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) stellen Geometrien aus Produkten dar; und die letzten drei (*Nil*, *Sol* und $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$) schließlich stellen Geometrien aus Liegruppen dar.

Der Beweis, dass diese acht Modellgeometrien ausreichen sowie die Geometrien selbst stellen das Thema zahlreicher weiterführender Arbeiten dar, siehe z.B. [13].

Insgesamt konnten wir damit also einen enorm weitreichenden Überblick über die zur Klassifizierung der 3-Mannigfaltigkeiten notwendigen Sätze und Methoden geben.

Literaturverzeichnis

- [1] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland Publishing Company, 1975.
- [2] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1991.
- [3] Allen Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. Private Online-Veröffentlichung, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/#3M>.
- [4] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag New York, 1976.
- [5] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 1995.
- [6] W. Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, Berlin, 1997.
- [7] Frank Loose. Vorlesung Algebraische Geometrie. (unveröffentlicht).
- [8] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [9] Kurt Meyberg. *Algebra, Teil 1*. Fachbuchverlag Leipzig, 1990.
- [10] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds, 2003.
- [11] K. Reidemeister. Homotopieringe und Linsenräume. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11:102–109, 1935.
- [12] Claus Michael Ringel. Topologie I, II, III, Seminar - SS 2003, WS 2003/04, SS 2004, Leitfaden. Private Online-Veröffentlichung, <http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/top/>.
- [13] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15:401–487, 1983.
- [14] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., 1999.
- [15] William P. Thurston. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 6:357–379, 1982.

Index

A

Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten,
21

Abbildungsgrad, 41–43

Abelianisierung, 26, 27

Atlas, 15

atoroidal, 92

Aufpunkt, 31, 36

B

\mathbb{B}^n , *siehe* Ball

Bahn, 68, 69, 74

Bahnenraum, 74, 76

Ball, 23

C

charakteristische Untergruppe, 73, 76

Chirurgie, 55, 93

D

Derivation, 18

Diffeomorphismus, 21, 48

 Diffeomorphismengruppe, 22

Dimension, 22

E

einfach zusammenhängend, 37

F

Faser, 66, 70

Fläche, 59, 62, 79

freies Produkt von Gruppen, 25, 27

Fundamentalgruppe, 35–39, 44, 76, 90

Funktionskeim, 18

G

Genus, 62

Geometrie, 96

Geschlecht, *siehe* Genus

Gleichheit von Mannigfaltigkeiten, 22

H

Homotopie, 29–32, 34, 35, 42, 43, 71

 relative, 32

 von Pfaden, 31

hyperbolischer Raum, 80

I

inkompressibel, 92

K

Karte, 15

Knoten, 91

Kommutator, 26

Kommutatoruntergruppe, 26

Kreis, 40, 41, 44, 79

L

Liegruppe, 68

Lift, 41, 70

 von Wegen, 70, 71

Linsenraum, 87

lokales Koordinatensystem, 15

M

Mannigfaltigkeit, 20, 22

 berandete, 16

 glatte, 15

 kompakte, 16

 prim, 57

 Produkt, 17

 riemannsche, 80, 96

 topologische, 15

Index

Metrik, riemannsche, 80
Modellgeometrie, 96

N

nullhomotop, 31

O

Operation, 66, 67, 69, 74, 76, 79
 durch Diffeomorphismen, 68
 eigentlich diskontinuierliche, 69
Orbit, *siehe* Bahn
Orientierbarkeit, 18, 20

P

Perelman, Grigori, 96
Pfad, 31–36, 70, 71
Poincaré-Vermutung, 96
prim, 57
Primdekomposition, 57
Produkt, 38
 freies, *siehe* freies Produkt von Gruppen
Pseudotorus, 81, 83, 84

Q

Quotienten, 65, 85

R

\mathbb{R}^n , 23, 39
Rand (einer Mannigfaltigkeit), 16
Reparametrisierung, 33

S

S^n , *siehe* Sphäre
Schnitt, 19, 20
Seifert, Herbert, 50
Seifert-van Kampen, Satz von, 50, 54
Sphäre, 23, 40, 44, 54, 59, 80, 81
Struktur, 15

T

\mathbb{T}^n , *siehe* Torus
Tangentialbündel, 19, 20
Tangentialraum, 19
Thurston, William P., 95
Thurstonvermutung, 95

Torus, 23, 24, 41, 59, 61, 79, 81, 82, 84
 ausgefüllt, *siehe* Volltorus
Torusdekomposition, 92

U

Übergangsfunktion, 15
Überlagerung, 65, 70
 reguläre, 76
 universelle, 66, 77

V

van Kampen, Egbert, 50
Volltorus, 89

W

Weg, *siehe* Pfad
wegzusammenhängend, 15
Windungszahl, 42

Z

zusammenhängend, 15
zusammenhängende Summe, 45, 59, 81,
 89